

# 多項式

鄭容濤

May 19, 2019

## 0 甚麼是多項式

下面這東西叫做一元多項式

**Definition 1.**  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathbb{R}[x]$  是一個多項式代表

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

當然  $\mathbb{R}$  也可以換成  $\mathbb{Q}$  或各種有定義加法跟乘法的結構。

可以遞迴地定義  $m$  元多項式

**Definition 2.**  $f_0, \dots, f_n \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_{m-1}]$ ,  $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]$  是一個  $m$  元多項式代表

$$f(X) = f_0(\bar{X}) + f_1(\bar{X})x_m + \dots + f_{n-1}(\bar{X})x_m^{n-1} + f_n(\bar{X})x_m^n$$

其中  $X = (x_1, \dots, x_m)$ ,  $\bar{X} = (x_1, \dots, x_{m-1})$

稱  $x_1, \dots, x_m$  為變數，變數前面的數字為係數，一個單獨的數字項叫做常數

**Property 1.** 多項式的和跟積也還是多項式

**Definition 3.** 定義多項式中一個項的次數是每一個變數的次方的和，一個多項式  $f$  的次數是所有項的次數的最大值記做  $\deg f$ 。特別地，定義零多項式的次數是  $-1$

接下來（這堂課）我們只關心一元多項式

**Definition 4.** 若  $f(t) = 0$ ,  $t$  被稱作  $f$  的根

**Definition 5.** 多項式  $f, g$ ,  $g \mid f$  若存在多項式  $h$  使得  $f = gh$

所以就可以定義倍式了

**Property 2.** 若  $f(t) = 0$ ,  $x - t \mid f(x)$

**Corollary 1.** 多項式的根的數目小於等於次數

下面這個定理代表我們可以假設一個實係數多項的根，然後利用展開得到根與係數的關係式

**Theorem 1.** (代數基本定理)  $n$  次多項式  $f \in \mathbb{C}[x]$  有  $n$  個複數根

相信大家都會計算一次多項式跟二次多項式的根，可能也有人會算三次甚至四次多項式的根，可是無法再往上走了，因為其實有一個更強的結論：

**Theorem 2.** (Galois) 對正整數  $n > 4$ ，存在一個整係數  $n$  次多項式  $f$ ，使得  $f$  的根不能用有理數加減乘除和開任意次方的根號來得到

**Definition 6.** 對正整數  $n$ ， $n$  次多項式  $f$  中， $x^n$  的係數叫做領導係數，如果領導係數是 1， $f$  被稱為首一多項式

**Definition 7.** 既約多項式 (不可約多項式) 是指不可被分解成兩個多項式之乘積的非常數多項式。不可約的性質取決於係數所屬於的體或環，通常討論整數既約多項式。

**Property 3.** 只要係數是可以除法的 (例如有理數)，就可以把多項式拿去輾轉相除法

**Definition 8.** 有理係數多項式  $f, g \neq 0$ ，存在唯一多項式  $h, r$  使得  $f = gh + r$  且  $\deg r < \deg g$ ，稱  $r$  為  $f$  除以  $g$  的餘式

**Corollary 2.** 若  $r$  是有理係數多項式  $f, g$  的根， $r$  也是  $(f, g)$  的根

**Corollary 3.** 若有理係數多項式  $f, g$  互質，那麼存在有理多項式  $h, k$  使得  $fh + gk = 1$

**Definition 9.** 如果整係數多項式  $f$  滿足所有係數的公因數是 1，稱  $f$  為本原多項式

**Property 4.** 只要係數是有唯一分解的 (例如整數)，就可以把多項式唯一分解  
所以就得到了

**Property 5.** (多項式高斯引理) 兩個本原多項式的乘積也是本原多項式

這個定理有另一個敘述形式

**Property 6.** (另一種多項式高斯引理) 如果整係數多項式  $f(x)$  在有理數系可約，那麼  $f(x)$  在整數系也可約

也因此會得到推論

**Corollary 4.** (有理根檢驗法) 對整係數多項式  $f(x)$  的所有化為最簡分數的有理數根  $\frac{p}{q}$ ， $p$  是最低次項係數的因數， $q$  是領導係數的因數

**Property 7.** 如果複數  $c$  是實係數多項式  $f$  的根，那  $\bar{c}$  也是  $f$  的根

**Corollary 5.** 奇數次的實係數多項式有實根

**Theorem 3.** (拉格朗日插值法) 對某個  $k$  次以下多項式函數  $f$ ，已知有給定的

$k+1$  個取值點

$$(x_0, y_0), \dots, (x_k, y_k)$$

假設任意兩個不同的  $x_j$  都互不相同，

$$f(x) = \sum_{j=0}^k y_j \prod_{i=0, i \neq j}^k \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

注意到這件事也代表  $k+1$  個取值跟  $k$  次以下多項式一一對應

## 1 我也是多項式

**Example 1.** 多項式  $P(x)$  滿足  $P(x) = P(-x)$  證明  $P(x)$  只有偶數次項。

**Example 2.** 求所有實多項式滿足

$$P(x)P(x+1) = (x+2)P(x-1)$$

**Example 3.** 找到所有實係數多項式  $P(x)$  滿足對所有質數  $q$

$$P(q)P(q^2+1) = P(q+2)P(q^2)$$

**Example 4.** 找到所有實係數多項式  $x|P(x)$  滿足對所有實數  $x$

$$P(x^2+1) = P(x)^2+1$$

**Example 5.** 找到所有實係數多項式  $P(x)$  滿足

$$P(x^2) = P(x)P(x+1)$$

**Example 6.** (2008 Baltic way P1) 找到所有實係數多項式  $P(x)$  滿足

$$p((x+1)^3) = (p(x)+1)^3, p(0) = 0$$

**Example 7.** (2010 Baltic way P4) 找到所有實係數多項式  $P(x)$  滿足

$$(x-2010)P(x+67) = xP(x)$$

**Example 8.** (2017 Taiwan 一階獨研 6) 找到所有實係數多項式  $P(x)$  滿足

$$P(x)P(x+1) = P(x^2 - x + 3) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

**Example 9.**  $a_0, \dots, a_n$  是整數

$$P(x) = \left( \prod_{i=0}^n (x-a_i)^2 \right) + 1$$

，試證  $P(x)$  在整數不可約

**Example 10.** 找到所有實係數多項式  $P(x, y)$  滿足

$$P(x^2, y^2) = P\left(\frac{(x+y)^2}{2}, \frac{(x-y)^2}{2}\right)$$

## 2 多項式酷哥

下面這個可能是整篇講義最常用的定理

**Property 8.** 整係數多項式  $f$  滿足對於相異正整數  $a, b$ ,

$$a - b \mid f(a) - f(b)$$

**Theorem 4.** 一個整數打到整數的多項式  $f$  可以寫成

$$f(x) = \sum_{i=0}^d a_i \binom{x}{i}$$

**Theorem 5.** (艾森斯坦判別法) 給定一個整係數多項式  $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ , 若存在質數  $p$ , 使得  $p \nmid a_n, p \mid a_i$  對於所有  $i < n$  且  $p^2 \nmid a_0$ , 那麼  $P(x)$  不可約。

**Property 9.**  $k$  是非負整數,  $f$  是  $k$  次多項式, 那  $f(x+1) - f(x)$  是  $k-1$  次多項式

**Corollary 6.**  $k$  是正整數  $\sum_{i=0}^x i^k$  為  $x$  的  $k+1$  次多項式。

## 3 我不小心刪掉我原來的 tex 檔了

下面第一個結論請背起來, 謝謝

**Example 11.**  $z$  是整數, 證明整係數多項式  $f$  滿足  $f(x) \mid f(x + zf(x))$

**Example 12.** 整係數多項式  $f$  沒有重根若且惟若  $(f, f') = 1$

**Example 13.**

$$P(x) = 97! \sum_{i=0}^{97} \frac{x^i}{i!}$$

證明  $P(X)$  在整數不可約

**Example 14.** 整係數四次多項式  $P(x)$  有四個相異整數根, 如果存在質數  $p$  滿足  $P(x) - p^2$  有整數根, 證明  $P(x)$  的一次項是四的倍數。

**Example 15.** (2014 USAMO P1) Let  $a, b, c, d$  be real numbers such that  $b - d \geq 5$  and all zeros  $x_1, x_2, x_3$ , and  $x_4$  of the polynomial  $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$  are real. Find the smallest value the product  $(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)(x_3^2 + 1)(x_4^2 + 1)$  can take.

**Example 16.** 若  $P$  和  $Q$  是兩個非常數複係數多項式, 且  $P$  和  $Q$  的根所形成的集合一樣,  $P+1$  和  $Q+1$  的根所形成的集合也一樣, 試證  $P=Q$

**Example 17.** (2015 A6 弱化) Let  $n$  be a fixed integer with  $n \geq 2$ . We say that two polynomials  $P$  and  $Q$  with real coefficients are block-similar if for each  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  the sequences

$$P(2015i), P(2015i - 1), \dots, P(2015i - 2014) \quad \text{and} \\ Q(2015i), Q(2015i - 1), \dots, Q(2015i - 2014)$$

are permutations of each other.

Prove that there do not exist distinct block-similar polynomials of degree  $n - 1$ .

**Example 18.** (2017 1J P5) 令  $n$  為某個大於 1 的奇數，而  $f(x)$  為  $x$  的  $n$  次式，已知  $f(k) = 2^k$  對  $k = 0, \dots, n$  均成立，證明使得  $f(x)$  為 2 的幕次的整數  $x$  為有限個

**Example 19.** (2014 A5) Consider all polynomials  $P(x)$  with real coefficients that have the following property: for any two real numbers  $x$  and  $y$  one has

$$|y^2 - P(x)| \leq 2|x| \quad \text{if and only if} \quad |x^2 - P(y)| \leq 2|y|.$$

Determine all possible values of  $P(0)$ .