
組合

王師宇

Dec 16, 2018

組合的核心技巧就不多但應用手法卻需要大量練習，或者是通靈。做組合題的一個簡單的原則是透過小數字觀察規律但不一定管用。

1 核心技巧

奇偶性

Problem 1.1. 是否存在一條直線和一個十一邊形 (可以自交也可以為凹多邊形)，滿足這一條直線不經過這十一邊形的頂點但經過所有十一條邊。

Problem 1.2. 平面上有三顆足球，每過一秒鐘，一位運動員踢其中一顆足球，並從另外兩顆足球之間穿過然後停下，請問 25 秒鐘後三顆球是否能回到原來的位置上。

配對, 握手定理

Problem 1.3. 能不能把一個凸十三邊形分成若干個平行四邊形？

Problem 1.4. 存不存在一個九邊形，他的每一條邊都和其他八條邊中的恰一條邊相交 (不計算頂點重合)？

塗色法, 賦值法

最常見的是黑白交錯塗色法。

Problem 1.5. 找出所有 n 使得 $n \times n$ 的棋盤可以用若干個 I 型四方塊覆蓋。

Problem 1.6. 找出所有 n 使得 $n \times n$ 的棋盤可以用若干個 T 型四方塊覆蓋。

Problem 1.7. 若一個 7×7 棋盤被一些 V 型三方塊和一些 O 型四方塊完全覆蓋，證明 O 型四方塊一定只有一個。

不變量

Problem 1.8. 我們是否可能經過若干次下列操作將字串 "AAB" 變換成字串 "ABB"：

- 將字串 S 中的一個字元 B 換成 AA ，或者將一個字元 A 換成 BB
- 將字串 S 中連續三個 A 或連續三個 B 刪掉

Problem 1.9. 黑板上寫著 $1 \sim 100$ 的正整數，每次擦掉其中兩個數 a, b 並把 $ab + a + b$ 寫上去，求最後一個數字的可能值。

數學歸納法

由於數學歸納法在各個領域都會出現所以這裡不提供參考題目

抽屜原理, 鴿籠原理

Problem 1.10. 有 n 個正數 a_1, a_2, \dots, a_n ，證明可以從中挑出若干個 (至少為一) 加起來為 2018 的倍數。

Problem 1.11. 平面上有 7 個點落在長為 3, 寬為 4 的矩形內，證明存在兩個點的距離不超過 $\sqrt{5}$ 。

Problem 1.12. 證明任意六個人中一定存在三個人互相認識或找三個人互相不認識。

2 練習題

Problem 2.1. 黑板上寫著 n 個 1，每次操作從黑板上擦掉兩個數字 a, b 並把 $\sqrt{\frac{ab}{2}}$ 寫上黑板，證明最後留在黑板上的數字不小於 $\sqrt{\frac{1}{n}}$ 。

Problem 2.2. 證明任意 n 個人中存在兩個人的朋友數量一樣多。

Problem 2.3. 平面上有 n 個點，每個點有一個好棒棒值，一開始都為 0。對於其中每個點 A 我們會從剩下 $n - 1$ 個點中選擇一個離他最近的點 B 然後把 B 的好棒棒值加一。證明不存在一個人的好棒棒值超過 6。

Problem 2.4. 我們最多能從 $1 \sim 2018$ 中挑出多少個相異的數，使得兩兩不為因倍數關係。

Problem 2.5. 一個五層的書櫃上有 15 本書，令 a_i 表示第 i 層書櫃的書本數量， b_i 表示第 i 層書櫃和第 $i+1$ 層書櫃的書本數量和，證明 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4$ 中有兩個數字相等。

Problem 2.6. 有一位棋手每天至少下一盤棋，每個禮拜至多下 12 盤棋，證明在連續的 11 個禮拜內，有連續幾天下棋的總數量恰為 21 盤。

Problem 2.7. 證明對於所有正整數 n ，我們可以用 V 型三方塊覆蓋 $2^n \times 2^n$ 並且其中一個角被挖掉的棋盤。

Problem 2.8. 如果一個頂點都是格點，邊都平行 x, y 軸的多邊形 P 可以被一些 Z 型四方塊覆蓋，那如果我們拿一些 Z 型和 S 型四方塊覆蓋 P ，證明我們一定使用了偶數個 S 型四方塊。

Problem 2.9. 在一塊 3×6 的矩形棋盤中，每一個格子都被放上黑色或白色的棋子，證明存在一個以相同顏色的四個棋子為頂點的矩形。

Problem 2.10. 史密斯夫婦邀請另外四對夫婦就餐，餐會後史密斯問其他九個人握手的次數結果發現數字都不一樣。已知夫婦之間不會握手，請問史密斯太太握手幾次？

Problem 2.11. 有一個邊長都是奇數的矩形被分割成好幾個邊長都是整數的小矩形，證明存在一個小矩形和大矩形四個邊的距離奇偶性一樣。

Problem 2.12. 證明對於所有質數 p ，存在正整數 n 滿足 $p \mid F_n, p \mid F_{n+1} - 1$ ，其中 F_n 表示費波那契數列第 n 項且 $F_1 = F_2 = 1$ 。

Problem 2.13. 在一個只有三叉路口的城鎮中，有一個人從其中一個路口出發，輪流左轉右轉，證明他一定會回到最一開始的三叉路口。

Problem 2.14. 找出所有正整數 n 滿足以下條件：不管我們怎麼從 $1 \sim 100$ 中選 75 個塗成紅色，所有滿足 $100 \mid a_1 + a_2 + \dots + a_n, 1 \leq a_i \leq 100$ 的 n 元數組 (a_1, a_2, \dots, a_n) 中有至少一半有偶數個紅色數。

Problem 2.15. 黑板上寫著 n 個 1，每次將黑板上的兩個數 a, b 擦掉並寫上 $\frac{a+b}{4}$ ，證明最後留下的數字不小於 $\frac{1}{n}$ 。

Problem 2.16. 用 $1 \times 1, 2 \times 2, 3 \times 3$ 的矩形完美覆蓋 23×23 的棋盤至少需要用幾個 1×1 的方格？

Problem 2.17. 兩個完全相同的 14 齒齒輪 A, B ， B 被放在一個水平面上， A 放在 B 上面使兩者重合，接者任意敲掉任意四對重合的齒。請問我們是否總能將 A 旋轉一個適當的角度使得兩個齒輪在水平面上的投影是一個完整的齒輪？

Problem 2.18. 平面上有 n 個兩兩相交且三線不共點的線段，小杰在每個線段的兩個端點中選擇其中一個放上一隻面向另一個端點的青蛙，接下來 $n-1$ 秒中每過一秒每隻青蛙會跳向他所在的線段中和別的線段的下一個交點。小杰希望在這 $n-1$ 秒中不要用兩隻青蛙撞倒（在同個交點上）。證明：

- 如果 n 是奇數，小杰一定能達成他的願望。
- 如果 n 是偶數，小杰一定不能達成他的願望。

Problem 2.19. 找出所有正整數 n 使得我們可以在 $n \times n$ 的表格的每格填上 I, M, O 三種字元，且整個表格滿足：

- 每行每列都恰有 $\frac{1}{3}$ 的 I, M, O 。
- 每一條長度為 3 的倍數的對角線中恰有 $\frac{1}{3}$ 的 I, M, O 。

Problem 2.20. 考慮座標平面上所有 $1 \leq x \leq 20, 1 \leq y \leq 20$ 的格點 (x, y) ，甲乙兩人在上面玩一個遊戲。一開始這 400 個格點都是空的。接著甲乙兩人輪流操作，甲為先手。每回合甲選擇一個空的點放上一顆紅石頭，乙則放上一顆藍石頭。若要求任兩個紅石頭的距離不是 $\sqrt{5}$ ，請問甲最多能保證放下幾個紅石頭？

Problem 2.21. 有一個三邊長為 a, b, c 的三角形，每次操作我們重新建構一個邊長為 $s-a, s-b, s-c$ 的三角形，其中 $s = \frac{a+b+c}{2}$ ，請問有哪些三角形可以無限的操作下去。

Problem 2.22. 有 2018 個正整數 $a_1, a_2, \dots, a_{2018}$ 且每一個數的質因數都不超過 30，證明我們能找到四個不一樣的下標 i, j, k, l 滿足 $a_i a_j a_k a_l$ 為完全平方數。

Problem 2.23. 有 $n(n+1)$ 個身高互不相同的球員站成一排，證明我們永遠能移除其中 $n(n-1)$ 個人讓剩下 $2n$ 個人維持原來的順序，且在這 $2n$ 個人中第 $2i-1$ 高的和第 $2i$ 高的都站在旁邊 ($1 \leq i \leq n$)。