

不等式

一、平均值不等式

1.1 平均值不等式

$$a, b \geq 0, \text{ 則 } (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (1.1)$$

一般來講，若 $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ ，則算術平均數為

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

幾何平均數為

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

我們有

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = G_n$$

“=”成立，若且唯若 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

1.2 排序不等式

兩個數列 $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ 滿足 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ 且 $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$

則

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n &\geq a_1 b_{j_1} + a_2 b_{j_2} + \dots + a_n b_{j_n} \\ &\geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 \end{aligned}$$

其中 j_1, \dots, j_n 為 $1, 2, \dots, n$ 的任意排列。且等號只在 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 且 $b_1 = b_2 = \dots = b_n$ 時成立。

1.3 契比雪夫不等式

設 $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ 滿足 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ 且 $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$

則

$$\sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \sum_{k=1}^n b_k \leq \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

且等號只在 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 且 $b_1 = b_2 = \dots = b_n$ 時成立。

二、平均值不等式的應用

【例 1】 $a, b \in \mathbb{R}^+, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ ，則對所有正整數 n ，

$$(a+b)^n - a^n - b^n \geq 2^{2n} - 2^{n+1}$$

【例 2】 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ ，試證

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2$$

【例 3】假設 n 是大於等於 3 的自然數，給定實數 a_1, \dots, a_n ，令

$$m = \min\{|a_i - a_j|, 1 \leq i < j \leq n\}$$

求條件 $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$ 下， m 的最大值。

【例 4】 $f(x) = \frac{a}{a^2-1}(a^x - a^{-x}) (a > 0, a \neq 1)$

試證：對正整數 $n \geq 2$ ，有 $f(n) > n$

【例 5】設 $x > 0$ ，試證 $2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \geq 2 \times 2^{\sqrt[6]{x}}$

【例 6】 $a_i > 0, i = 1, 2, \dots, n; a_1 \times \dots \times a_n = 1$ ，試證

$$(2 + a_1) \times (2 + a_2) \times \dots \times (2 + a_n) \geq 3^n$$

【例 7】已知 $x + y + z = 0$ ，試證

$$6(x^3 + y^3 + z^3)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2)^3$$

【例 8】假設 $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ 均為正值且滿足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq 1$ ，

$b_1 + b_2 + \dots + b_n \leq n$ 。試證：

$$\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1}\right) \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2}\right) \dots \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}\right) \geq (n+1)^n$$

【例 9】 $a, b, c \in R^+$ ，試證

$$abc \geq (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$$

【例 10】 $a, b, c \in R^+$ ，試證

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$

【例 11】 $a, b, c \in R^+$ ，求

$$\frac{a+3c}{a+2b+c} + \frac{4b}{a+b+2c} - \frac{8c}{a+b+3c}$$

的最小值

【例 12】 $a, b, c \in R^+$ 且 $abc = 1$ ，求 $\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right)$ 的最大值

【例 13】設 P 為 $\triangle ABC$ 內一點， D, E, F 分別為 P 到 BC, CA, AB 各邊的垂足，試找出讓 $PD \times PE \times PF$ 最大的 P

【例 14】證明： $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

【例 15】 $0 < a_1 < 3, a_{n+1} = \sqrt{a_n(3-a_n)}$ 。試證：數列 $\{a_n\}$ 單調遞增，且有上界

三、柯西不等式

設 $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ 是任意實數，則

$$(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

等號只在 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ 時成立

四、柯西不等式的應用

【例 1】 $a, b, c \in R^+$ 且 $a + b + c = 1$ ，求證

$$\frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} \geq 36$$

【例 2】 $a, b, c \in R^+$ 且 $a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha < c$ ，求證

$$\sqrt{a}\cos^2\alpha + \sqrt{b}\sin^2\alpha < \sqrt{c}$$

【例 3】設 $a_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ 且 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ 。Ajjw ijd

$$\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} \geq \frac{1}{2}$$

【例 4】 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ， n 是自然數。求證

$$\left(\frac{1 - \sin^{2n}x}{\sin^{2n}x}\right) \left(\frac{1 - \cos^{2n}x}{\cos^{2n}x}\right) \geq (2^n - 1)^2$$

【例 5】 $a_i \in R^+, i = 1, 2, \dots, n$ 。證明：

$$\frac{1}{\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \dots + \frac{1}{1+a_n}} - \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \geq \frac{1}{n}$$

【例 6】證明滿足條件

$$(1) \sum_{i=1}^n a_i \geq n^2 \quad (2) \sum_{i=1}^n a_i^2 \leq n^3 + 1$$

的整數 a_1, a_2, \dots, a_n 只有 $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (n, n, \dots, n)$

【例 7】 $a, b, c, x, y, z \in R$ ，且 $a^2 + b^2 + c^2 = 25$ ，

$$x^2 + y^2 + z^2 = 36, ax + by + cz = 30$$
求

$$\frac{a+b+c}{x+y+z}$$

的值

【例 8】 x, y, z 是大於-1的實數，求

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2} + \frac{1+y^2}{1+z+x^2} + \frac{1+z^2}{1+x+y^2}$$

的最小值

【例 9】在一群數學家中，每個人都有一些朋友(關係是互相的)。證明：存在一個數學家他所有的朋友的「朋友人數平均值」不小於這群數學家的「朋友人數平均值」。