
鴿籠原理

范谷瑜

Apr. 21, 2019

【定理 1】把 $n + 1$ 隻鴿子放入 n 個籠子裡，至少有一個籠子裡有兩隻鴿子。

【範例 1】十三個人中一定有兩個人同一個月份生日。

【範例 2】三個整數中一定有兩個整數的和被二整除。

證明：由鴿籠原理知道三個整數中必定有兩個整數的奇偶相同，而他們的和被二整除。

【定理 2】把 $mn + 1$ 隻鴿子放入 n 個籠子裡，至少有一個籠子裡有 $m + 1$ 隻鴿子。

【範例 3】把十個人分成三組一定有一個小組有四個人。

【範例 4】三十個人若男女各半則圍成一圈時必有一個人的左右兩邊都是女生

證明：如果有一個男生的左右兩邊都是女生，則滿足題意。所以每個男生的旁邊至少有一個男生，也就是排成一圈時連續的男生至少兩個人，那麼連續的男生最多有七組。此時，讓女生排入圈中，因為有七組連續的男生所以有七組空隙，由鴿籠原理知道有三個連續的女生排在一起，此時中間的女生左右兩邊都是女生。

【定理 3】把 m 隻鴿子放入 n 個籠子裡，至少有一個籠子裡有 $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ 隻鴿子。

【範例 5】把 94 顆球放到 87 個箱子裡，至少有一個箱子裡有兩顆球。

【範例 6】把 $\{1, \dots, 20\}$ 分割成 A、B、C 三個集合，必定存在三個相異元素 x, y, z 在同一個集合中使得 $x + y = z$

證明：鴿籠原理可以知道必有一個集合有 7 個元素，不妨假設是 A 且 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7$ ，根據題意當 $i = 2, \dots, 7$ 時 $a_i - a_1$ 不在這個集合中，再用一次鴿籠原理得到，B 或 C 中至少有一個集合包含 $a_i - a_1$ 中的三個，不妨假設是 B 且 $b_1 < b_2 < b_3$ ，則根據題意 $b_2 - b_1$ 和 $b_3 - b_1$ 不在 A 中也不在 B 中，所以此兩元素皆位於 C 中，則 $b_3 - b_2$ 不論位於 A 或 B 或 C 中皆使得題意成立。

【定理 4】把 m 隻鴿子放入 n 個籠子裡，存在一個籠子裡至多有 $\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor$ 隻鴿子

【範例 7】籃球比賽中，A 隊的五位選手共得了 103 分，則存在一位選手的得分最多 20 分

【範例 8】在圓周的 30 個等分點上隨機填上 0 或 1 兩種數字，令 A 為一個由 3 個 0 和 3 個 1 所排成的 6 位序列，若將 A 依序放置於圓周等分點上，一定會有一種放置方案使得相同的位數不超過 3 位。

證明：考慮圓周上的 1 個點，由於該點會和 A 上的每個數字各重複一次，故不論該點為 0 或 1 都將被相同的數字對應 3 次，所以圓上 30 個數字將會被相同的數字對應 90 次，由鴿籠原理得到至少有一種對應方式使得相同的位數不超過 $\left\lceil \frac{90}{30} \right\rceil = 3$ 位。

-
- 【習題 1】從 52 張撲克牌中抽出 45 張一定會有同花順。(E)
- 【習題 2】從 $\{1, \dots, 2n\}$ 中挑出 $n + 1$ 個數字，必定存在一個數字是另一個的倍數。(E)
- 【習題 3】假設認識與不認識的關係是互相的，也就是說 A 認識 B 若且唯若 B 認識 A，則六個人中必有三個人兩兩認識或兩兩不認識。(E)
- 【習題 4】假設認識與不認識的關係是互相的，則任意 n 個人中必有兩個人認識的人數相同。(E)
- 【習題 5】 $\{1, \dots, 40\}$ 排成一圈，則存在連續的三個整數使得他們的和不大於 60. (N)
- 【習題 6】100 個整數排成一列，則存在一串連續的整數使得他們的和被 100 整除。(N)
- 【習題 7】 $\{1, \dots, 50\}$ 排成一列，則存在一個長度為 8 的遞增子列或遞減子列。(N)
- 【習題 8】假設認識與不認識的關係是互相的，現在有三個 24 人的班級，如果這 72 個人都認識另外兩個班 48 人中至少 25 個人，則可以從三個班各挑出一個人使他們兩兩認識。(H)
- 【習題 9】一個圓被 18 個點等分成 18 個弧，其中有 6 個點塗成藍色、6 個點塗成紅色、6 個點塗成黃色，則可從每個顏色中各選出兩個點連成一線段，使得這三條線段等長。(H)

Burnside 引理

范谷瑜

Apr. 21, 2019

【問題】在一個正三角形的三邊上塗上黑白兩種顏色後會形成幾種不同的圖樣呢？此問題目測就有答案，但是如果改成正五邊形、正十邊形還是一樣容易嗎？如果改成三種顏色、五種顏色呢？

Burnside 引理是一個組合計數十分好用的定理，他可以幫助我們解決上述的著色數問題，以下內容假設大家對於集合已經有基本的概念，像是如何表示一個集合？何為包含、屬於？什麼是集合的相等？聯集、交集、卡氏積這些運算又是什麼？若對於以上問題你皆有正確的理解，底下將進入本次的主題 Burnside 引理。

【定義 1】給定一個從A到B的函數 f

我們說函數 f 是單射的意思是 $\forall a \in A \ f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$.

我們說函數 f 是滿射的意思是 $\forall b \in B \ \exists a \in A$ 使得 $f(a) = b$.

我們說在函數 f 之下B的子集合 B' 的原像(記做 $f^{-1}(B')$)是 $\{a \in A | f(a) \in B'\}$.

【定義 2】一個集合A上的二元運算 $*$ 是一個從 $A \times A$ 送到A的函數，如果 $*(x, y) = z$ 我們一般會記做 $x * y = z$.

【定義 3】如果一個集合G搭配一個G上的二元運算 $*$ 並滿足以下三個條件，則我們稱之為群，並記做 $(G, *)$ 簡寫成G.

結合律： $\forall a, b, c \in G \ (a * b) * c = a * (b * c)$.

單位元： $\exists e \in G$ 使得 $\forall g \in G \ e * g = g * e = g$. (其中 e 是G中的單位元)

逆元素： $\forall g \in G \ \exists g' \in G$ 使得 $g * g' = g' * g = e$.

(因為 g' 是唯一的所以我們一般會把 g 的逆元素 g' 記成 g^{-1})

如果一個群G中集合G的元素個數是有限的則稱其為有限群。

【範例 1】 $\forall n \in \mathbb{N} \ \mathbb{Z}_n := (\{0, 1, \dots, n-1\}, +_n)$

$$+_n: \{0, 1, \dots, n-1\} \times \{0, 1, \dots, n-1\} \rightarrow \{0, 1, \dots, n-1\}$$

$$x+_ny = z \text{ 其中 } z \text{ 使得 } x+y = qn+z \ q \in \mathbb{Z} \ z \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

【範例 2】 $\forall n \in \mathbb{N} \ S_n := (P_n, \circ)$ 其中 $P_n = \{f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\} | f \text{ 是單射且滿射}\}$

$$\circ: P_n \times P_n \rightarrow P_n \ f \circ g = h \text{ 其中 } h \text{ 使得 } \forall x \in \{1, 2, \dots, n\} \ f(g(x)) = h(x)$$

【範例 3】 $\forall n \in \mathbb{N} \ D_n := (\{\text{使正}n\text{邊形不變的操作}\}, *)$

$$*: \{\text{使正}n\text{邊形不變的操作}\} \times \{\text{使正}n\text{邊形不變的操作}\} \rightarrow \{\text{使正}n\text{邊形不變的操作}\}$$

$$\text{操作}a * \text{操作}b = \text{操作}c \text{ 其中 } \text{操作}c \text{ 相當於先操作}b \text{ 再操作}a$$

【定義 4】給定一個集合X，我們說一個群G作用在集合X上的群作用，指的是一個從 $G \times X$ 到X的函數： $\cdot: G \times X \rightarrow X$ ，且滿足以下兩個條件

$$1. \ \forall g, h \in G \ \forall x \in X \ (g * h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x).$$

$$2. \ \forall x \in X \ e \cdot x = x \text{ 其中 } e \text{ 是 } G \text{ 中的單位元。}$$

如果 $\cdot(g, x) = y$ 我們一般會記做 $g \cdot x = y$.

【定義 5】給定一個群G作用在集合X上的群作用，我們說 x 在這個群作用下的軌道 O_x

指的是 $\{g \cdot x | g \in G\}$.

【定義 6】給定一個群 G 作用在集合 X 上的群作用，我們說 x 在這個群作用下的穩定子群(迷向子群) G_x 指的是 $\{g | g \cdot x = x\}$.

【範例 4】給定 \mathbb{Z}_n 作用在集合 $\{0, 1, \dots, n-1\}$ 上的群作用

$$+_n: \mathbb{Z}_n \times \{0, 1, \dots, n-1\} \rightarrow \{0, 1, \dots, n-1\}$$

$$x+_ny = z \text{ 其中 } z \text{ 使得 } x+y = qn+z \text{ } q \in \mathbb{Z} \text{ } z \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

【範例 5】給定 S_n 作用在集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 上的群作用

$$\cdot: S_n \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\} \text{ } f \cdot x = f(x)$$

【範例 6】給定 D_n 作用在 $\{\text{正}n\text{邊形的邊}\}$ 上的群作用

$$*: D_n \times \{\text{正}n\text{邊形的邊}\} \rightarrow \{\text{正}n\text{邊形的邊}\}$$

操作 $a * \text{邊}x = \text{邊}y$ 其中 $\text{邊}y$ 相當於 $\text{邊}x$ 經過操作 a 操作後所移動到的邊

【引理 1】假設群 G 作用在集合 X 上那麼 $\forall x, x' \in X \text{ } O_x \cap O_{x'} \neq \emptyset \Leftrightarrow O_x = O_{x'}$

證明：

" \Rightarrow " 假設 $O_x \cap O_{x'} \neq \emptyset$ ，那麼存在 $y \in O_x \cap O_{x'}$.

$\because y \in O_x \cap O_{x'}. \therefore y \in O_x \text{ 且 } y \in O_{x'} \Rightarrow \exists g \in G \text{ 使得 } g \cdot x = y \text{ 且 } \exists g' \in G \text{ 使得 } g' \cdot x' = y.$

$\because \forall a \in O_x \exists g_a \in G \text{ 使得 } g_a \cdot x = a \text{ 且 } g \cdot x = y = g' \cdot x'.$

$\therefore a = g_a \cdot x = g_a \cdot (g^{-1} * g) \cdot x = g_a \cdot g^{-1} \cdot y = (g_a * g^{-1} * g') \cdot x' \Rightarrow O_x \subseteq O_{x'}.$

接著將 O_x 和 $O_{x'}$ 的角色互換由同樣的證明手法得到 $O_{x'} \subseteq O_x$ ，於是 $O_x = O_{x'}$.

" \Leftarrow " 因為 $x = e \cdot x$ 且 $O_x = O_{x'}$. 所以 $x \in O_x \text{ 且 } x \in O_{x'} \Rightarrow O_x \cap O_{x'} \neq \emptyset$.

【引理 2】假設群 G 作用在有限集合 X 上那麼 $X = \coprod_{i=1}^n O_{x_i}$.

證明：因為 X 是有限集合且 $x \in O_x$. 所以可令 $X = \{x_i | i = 1, \dots, |X|\}$ 於是 $X = \bigcup_{i=1}^{|X|} O_{x_i}$.

所以我們由【引理 1】可以找到 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $X = \coprod_{i=1}^n O_{x_i}$.

【引理 3】假設群 G 作用在集合 X 上那麼 $\forall x \in X, g \in G \text{ } G_{g \cdot x} = g * G_x * g^{-1}$.

證明：

" \Rightarrow " 因為 $\forall h \in G_{g \cdot x} \text{ } h \cdot (g \cdot x) = g \cdot x \Rightarrow (g^{-1} * h * g) \cdot x = x \Rightarrow g^{-1} * h * g \in G_x$

$\Rightarrow h \in g * G_x * g^{-1}$. 所以 $G_{g \cdot x} \subseteq g * G_x * g^{-1}$.

" \Leftarrow " 因為 $\forall h \in g * G_x * g^{-1} \text{ } g^{-1} * h * g \in G_x \Rightarrow (g^{-1} * h * g) \cdot x = x$

$\Rightarrow h \cdot (g \cdot x) = g \cdot x \Rightarrow h \in G_{g \cdot x}$. 所以 $g * G_x * g^{-1} \subseteq G_{g \cdot x}$. 於是 $G_{g \cdot x} = g * G_x * g^{-1}$.

【引理 4】假設有限群 G 作用在有限集合 X 上那麼 $\forall x \in X \text{ } |G_x| \cdot |O_x| = |G|$

證明：固定一個 $x \in X$ 定義 $f: G \rightarrow O_x$ 使得 $f(g) = g \cdot x$ 接著由【引理 3】我們有

$$\begin{aligned} \forall g \in G \text{ } |f^{-1}(g \cdot x)| &= |\{h | h \in G, h \cdot x = g \cdot x\}| = |\{h | h \in G, (h \cdot g^{-1}) \cdot g \cdot x = g \cdot x\}| \\ &= |\{h \cdot g^{-1} | h \in G, (h \cdot g^{-1}) \cdot g \cdot x = g \cdot x\}| = |G_{g \cdot x}| = |g * G_x * g^{-1}| = |G_x|. \end{aligned}$$

因為 f 是一個滿射。所以 $|G| = |\coprod_{y \in O_x} G_y| = \sum_{y \in O_x} |G_y| = \sum_{y \in O_x} |G_x| = |O_x| \cdot |G_x|$.

【引理 5】(Burnside 引理)假設有限群 G 作用於有限集合 X 上，則 X 的軌道個數共有

$$\frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |F(g)|$$

其中 $F(g) = \{x \in X | g \cdot x = x\}$.

證明：由【引理 2】我們可以假設 $X = \coprod_{i=1}^n O_{x_i}$ ，其中 n 就是 X 的軌道個數，接著考慮

$$Y := \{(g, x) | (g, x) \in G \times X, g \cdot x = x\}$$

由 Y 的定義知道 $|Y| = \sum_{g \in G} |F(g)|$.

$$\begin{aligned} \text{另一方面，由【引理 4】得到 } |Y| &= \sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{i=1}^n \sum_{x \in O_{x_i}} |G_x| = \sum_{i=1}^n \sum_{g \cdot x_i \in O_{x_i}} |G_{g \cdot x_i}| \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{g \cdot x_i \in O_{x_i}} |G_{g \cdot x_i}| = \sum_{i=1}^n \sum_{g \cdot x_i \in O_{x_i}} \frac{|G|}{|O_{g \cdot x_i}|} = \sum_{i=1}^n \sum_{g \cdot x_i \in O_{x_i}} \frac{|G|}{|O_{x_i}|} = \sum_{i=1}^n |G| = n|G|. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \sum_{g \in G} |F(g)| = |Y| = n|G| \Rightarrow n = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |F(g)|.$$

【範例 7】使用三種不同顏色在一個正三角形的三個頂點上塗色，如果我們把旋轉後或翻面後會一樣的塗色法視為同一種，請問有幾種不同的塗色法。

【範例 8】使用四種不同顏色在一個長方形的四個頂點上塗色，如果我們把旋轉後或翻面後會一樣的塗色法視為同一種，請問有幾種不同的塗色法。

【範例 9】使用五種不同顏色在一個正四面體的四個頂點上塗色，如果我們把旋轉後會一樣的塗色法視為同一種，請問有幾種不同的塗色法。

【習題 1】使用四種不同顏色在一個正方形的四個頂點上塗色，如果我們把旋轉後或翻面後會一樣的塗色法視為同一種，請問有幾種不同的塗色法。(E)

【習題 2】使用五種不同顏色在一個正六邊形的六個頂點上塗色，如果我們把旋轉後或翻面後會一樣的塗色法視為同一種，請問有幾種不同的塗色法。(E)

【習題 3】使用十種不同顏色在一個正十二邊形的十二個頂點上塗色，如果我們把旋轉後或翻面後會一樣的塗色法視為同一種，請問有幾種不同的塗色法。(E)

【習題 4】使用六種不同顏色在一個 $1 \times 2 \times 3$ 長方體的八個頂點上塗色，如果我們把旋轉後會一樣的塗色法視為同一種，請問有幾種不同的塗色法。(N)

【習題 5】使用五種不同顏色在一個 $1 \times 1 \times 2$ 長方體的八個頂點上塗色，如果我們把旋轉後會一樣的塗色法視為同一種，請問有幾種不同的塗色法。(N)

【習題 6】使用四種不同顏色在一個正立方體的八個頂點上塗色，如果我們把旋轉後會一樣的塗色法視為同一種，請問有幾種不同的塗色法。(N)

【習題 7】使用四種不同顏色在一個正八面體的六個頂點上塗色，如果我們把旋轉後會一樣的塗色法視為同一種，請問有幾種不同的塗色法。(N)

【習題 8】使用四種不同顏色的 $1 \times 1 \times 1$ 立方塊排成 $2 \times 2 \times 2$ 立方塊，如果我們把旋轉後會一樣的排法視為同一種，請問有幾種不同的排法。(N)

【習題 9】使用四種不同顏色的 $1 \times 1 \times 1$ 立方塊各兩個排成 $2 \times 2 \times 2$ 立方塊，如果我們把旋轉後會一樣的排法視為同一種，請問有幾種不同的排法。(H)

【習題 10】使用兩種不同顏色的 $1 \times 1 \times 1$ 立方塊各四個排成 $2 \times 2 \times 2$ 立方塊，如果我們把旋轉後會一樣的排法視為同一種，請問有幾種不同的排法。(H)

【習題 11】使用三種不同顏色的 $1 \times 1 \times 1$ 立方塊各四個排成 $2 \times 2 \times 2$ 立方塊，如果我們把旋轉後會一樣的排法視為同一種，請問有幾種不同的排法。(H)