

---

# 數論

王師宇

Mar 31, 2019

## 1 不定方程

### 1.1 壓大小

**Example 1.1.** 找出所有正整數  $a, b, c$  滿足  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$

**Example 1.2.** 證明對於所有正有理數  $x$  和正整數  $n$ ,

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = x$$

的正整數解有限

**Example 1.3.** 找出所有  $a, b$  滿足  $a^2 + b^2 \mid ab + a + b$

**Example 1.4.** 證明對於所有正整數  $p, q, r$ ,

$$a^2 + b^2 \mid ab + pa + qb + r$$

的正整數解有限

**Example 1.5.** 找出所有正整數對  $(x, y)$  滿足

$$x^2 + x + 1 = y^2$$

**Example 1.6.** 找出所有正整數對  $(x, y)$  滿足

$$x^2 = y^4 + y^3 + y^2 + y + 1$$

**Problem 1.1.** 找出所有質數  $p, q, r$  滿足  $p \mid qr - 1, q \mid pr - 1, r \mid pq - 1$

**Problem 1.2.** 找出所有正整數  $a > b$  滿足  $(a - b)^{ab} = a^b b^a$

**Problem 1.3.** 找出所有正整數  $a, b, c$  滿足

$$a^2 + b + c, b^2 + a + c, c^2 + a + b$$

都是完全平方數

---

## 1.2 因式分解

標準程序為討論質因數，若題目中的變數沒有質數可以試試讓常數待在另一邊，但現在應該很難遇到這種老梗了。

**Example 1.7.** 找出所有正整數  $x$  和質數  $p$  滿足

$$p - 1 = x^2(x^2 + 1)$$

**Example 1.8.** 找出所有正整數  $x, y$  滿足

$$2x^2 + xy + 5x - 6y^2 - 4y = 22$$

**Example 1.9.** 找出所有質數  $p$  滿足  $\sqrt[4]{p-4}$  為整數

## 1.3 平方差

化加減為乘除的工具，基本上跟因式分解一樣。

**Example 1.10.** 找出所有正整數對  $(x, y)$  滿足

$$x^2 + x + 3 = y^2 + 5y + 2$$

**Example 1.11.** 找出所有正整數  $x, y, n$  滿足

$$x^2 = 2^n + y^2$$

**Example 1.12.** 找出所有正整數  $x, p, n$  滿足  $p$  是質數而且

$$x^2 = p^n + 1$$

**Example 1.13.** 證明對於所有正整數  $n$ ，二元方程式

$$x^2 = y^2 + n$$

的解有限

**Example 1.14.** 找出所有正整數  $n$  和質數  $p$  使得  $\sqrt{n^2 - np}$  為整數

**Problem 1.4.** 找出所有正整數  $n, x$  滿足

$$2^{2n+1} + 9 \cdot 2^n + 1 = x^2$$

**Problem 1.5.**  $a, b$  為非負整數，若對於所有正整數  $n$ ， $a \cdot 2^n + b$  都是完全平方數，證明  $a = 0$

---

## 1.4 判別式

通常和平方差息息相關

**Example 1.15.** 找出所有整數對  $(x, y)$  滿足

$$x^2 + (y + 3)x + (2y + 1) = 0$$

## 1.5 模

**Example 1.16.** 找出所有正整數對  $x, n$  滿足

$$2^n = x^2 + 1$$

**Example 1.17.** 找出所有正整數  $x, y, z$  滿足

$$x^2 + 2^y = 7^z$$

**Example 1.18.** 找出所有正整數  $x, y, z$  滿足

$$x^4 + y^4 = z^4 + 4$$

**Example 1.19.** 找出所有正整數  $x, y, z$  滿足

$$x^5 + y^5 = z^5 + 5$$

## 1.6 綜合練習題

**Problem 1.6.** 證明方程式

$$x^4 + y^3 = z! + 7$$

**Problem 1.7.** 找出所有正整數  $x, y$  滿足

$$3^x - 2^y = 1$$

**Problem 1.8.** 找出所有正整數對  $(x, y)$  滿足

$$\sqrt[3]{7x^2 - 13xy + 7y^2} = |x - y| + 1$$

**Problem 1.9.** 找出所有非負整數對  $(m, n)$  滿足

$$m^2 + 2 \cdot 3^m = m(2^{n+1} - 1)$$

---

## 2 數列

### 2.1 線性遞迴

一個  $k$  階線性遞迴是一個形如

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

的遞迴式。

**Theorem 2.1.** 若方程式  $x^k = c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \dots + c_k$  有  $k$  個相異實根  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ ，則存在  $A_1, A_2, \dots, A_k$  滿足

$$a_n = \sum_{i=1}^k A_i \alpha_i^n$$

**Theorem 2.2.** 定義  $b_n = \sum_{i=1}^k B_i \beta_i^n$ ，且

$$x^k - (c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \dots + c_k) = \prod_{i=1}^k (x - \beta_i)$$

則

$$b_n = c_1 b_{n-1} + c_2 b_{n-2} + \dots + c_k b_{n-k}$$

**Example 2.1.** 若數列  $\{a_i\}, \{b_i\}, \{c_i\}$  滿足遞迴式

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$$

$$c_n = 2c_{n-1} - c_{n-3}$$

請問以下數列的遞迴式為何？

- $\{2a_i + 3\}$
- $\{a_i + b_i\}$
- $\{a_i + c_i\}$
- $\{a_1 + a_2 + \dots + a_i\}$

線性遞迴也可以用矩陣乘法的角度思考。另外，我們也有以下有趣的小性質

---

**Theorem 2.3.** 令  $f(x) = x^n, g(x) = x^k - (c_1x^{k-1} + c_2x^{k-2} + \dots + c_k)$ ，令多項式除法得到

$$f(x) = g(x) * q(x) + r(x)$$

則  $r(x)$  的係數和  $a_n$  對應到的  $a_1, a_2, \dots, a_k$  的係數相同

**Problem 2.1.** 令  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  求

$$\sum_{i=0}^{2019} \lfloor \phi^i \rfloor$$

**Problem 2.2.** 令  $\lambda$  滿足  $\lambda = \lambda^{2/3} + 1$ ，證明存在正整數  $M$  滿足

$$|M - \lambda^{300}| < 4^{-100}$$