

唐詩三百首

廖泰甯

2019/03/31

1 時興

貴人昔未貴，咸願顧寒微。及自登樞要，何曾問布衣。
平明登紫閣，日晏下彤闈。擾擾路傍子，無勞歌是非。

1. () $2016 = 9 * 4 * 8 * 7$ 。
2. () 123456789012345678901 是質數。
3. () 1 和 100 之間有 25 個質數。
4. () 存在相異正整數 A, B, C, D 使得 $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 2019$ 。
5. () 存在四個質數 A, B, C, D 使得 $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 2019$ 。
6. () 2019 可以寫成 5 個相異質數之和。
7. () $\gcd(9999999, 9999) = 9$ 。(gcd 表示最大公因數)
8. () $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ 是有理數。
9. () $\sqrt[5]{5\sqrt{5}+11} - \sqrt[5]{5\sqrt{5}-11} = \sqrt[5]{2}$ 。
10. () 正整數 $85 = 2^2 + 9^2 = 6^2 + 7^2$ 是最小的可以寫成兩種不同的相異正平方數之和的數。
11. () 存在正整數 $n, m > 1$ ，使得
$$\left| \sqrt{2} - \frac{n}{m} \right| < \frac{1}{m^{100}}$$
12. () 令 p_n 為由小到大第 n 個質數 ($p_1 = 2$)。不存在連續四個質數 $p_k, p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3}$ 成等差數列。
13. () 存在 2019 個非質數的連續正整數。
14. () 型如 $2^n 3^m (n, m \geq 1)$ 的正整數可以寫成若干個自己的因數和，每個因數最多用一次。
15. () 存在正整數 n 使得 $(1+n)(2019^2+n)(331^2+n)$ 是完全平方數。
16. () 若令 p_n 為由小到大第 n 個質數 ($p_1 = 2$)，則對於所有 $n \geq 2$ ， $\frac{p_n + p_{n+1}}{2}$ 不是質數。

2 $am + bn = d$

綺繡相輾轉，琳琅愈青瑩。
側聞魯恭化，秉德崔瑗銘。

以下英文符號若無特別說明皆代表整數。

定義 1. 若整數 a, b, c 滿足 $a = bc$ ，且 $b \neq 0$ ，則記 $b \mid a$ 。稱 b 為 a 的因數， a 為 b 的倍數。

定義 2. 我們稱正整數 $p > 1$ 為質數若 $d > 0, d \mid p \Rightarrow d = 1$ 或 $d = p$ 。

定義 3. 若 d 滿足 $d \mid n$ 且 $d \mid m$ ，則稱 d 為 n, m 的公因數。

定義 4. 若 K 滿足 $n \mid K$ 且 $m \mid K$ ，則稱 K 為 n, m 的公倍數。

定義 5. 最小的正公倍數記為 lcm ，最大的正公因數記為 gcd 。我們說 a, b 互質若 $\text{gcd}(a, b) = 1$ 。

定義 6. 記 $\varphi(n)$ 為小於等於 n 且與 n 互質的正整數個數。

定理 1. (貝祖定理、輾轉相除法) 對於任意正整數 m, n ，存在整數 a, b 使得 $am + bn = \text{gcd}(m, n)$ 。

定理 2. (算數基本定理) 任一個大於 1 的正整數可以寫成若干個質數相乘，若不考慮乘法順序，這樣的寫法是唯一的。

1. 若 $a \mid b, b \mid c$ ，則 $a \mid c$ 。

2. 若 $a \mid c, b \mid c$ ，則 $\text{lcm}(a, b) \mid c$ 。

3. 若 $n \mid a, n \mid b$ ，則 $n \mid \text{gcd}(a, b)$ 。

4. 若質數 $p \mid ab$ ，則 $p \mid a$ 或 $p \mid b$ 。

5. $\text{gcd}(\text{gcd}(a, b), c) = \text{gcd}(a, b, c)$ 。

6. $\text{lcm}(\text{lcm}(a, b), c) = \text{lcm}(a, b, c)$ 。

7. $\text{gcd}(a, b)\text{lcm}(a, b) = ab$ 。

8. 給定正整數 n ， $\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n$ 。

9. 若 $n = \prod_{k=1}^m p_k^{a_k}$ 其中 p_k 皆為質數，則 $\varphi(n) = \prod_{k=1}^m (a_k + 1)$ 。

10. 試求一組 a, b 使得 $2019a + 108b = 1$ 。

3 $\gcd(m, n) = 1$, $\mathbb{Z}/(nm\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/(m\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$

鳳凰臺上鳳凰遊，鳳去臺空江自流。
吳宮花草埋幽徑，晉代衣冠成古丘。
三山半落青天外，二水中分白鷺洲。
總爲浮雲能蔽日，長安不見使人愁。

定義 7. 若 $n \mid (a - b)$ ，我們記做 $a \equiv b \pmod{n}$ ，讀作 a 同餘 b 模 n 。

1. $a \equiv b \pmod{n}, b \equiv c \pmod{n} \Rightarrow a \equiv c \pmod{n}$ 。
2. $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow b \equiv a \pmod{n}$ 。
3. 若 $\gcd(a, n) = 1$ ，則存在 b 使得 $ab \equiv 1 \pmod{n}$

由以上 (1), (2) 條性質，可以定義所有與 a 同餘模 n 的數構成一個等價類。

定理 3. (中國剩餘三三定理) 若正整數 m, n 互質，則對於所有 r, s ，存在唯一的 $t \in \mathbb{Z}/(nm\mathbb{Z})$ 使得

$$t \equiv r \pmod{m}, \quad t \equiv s \pmod{n}$$

1. 求所有整數 x 使得 $x \equiv 0 \pmod{2}$ 且 $x \equiv 0 \pmod{3}$ 。
2. 求所有整數 x 使得 $x \equiv 2 \pmod{7}$ 且 $x \equiv 2 \pmod{10}$ 。
3. 求所有整數 x 使得 $x \equiv 3 \pmod{5}$ 且 $x \equiv 1 \pmod{8}$ 。
4. 求所有整數 x 使得 $x \equiv 2 \pmod{22}$ 且 $x \equiv 3 \pmod{15}$ 。
5. 存在連續 100 個連續正整數都有平方因子。