

不等式

一、 平均值不等式

1.1 平均值不等式

$$a, b \geq 0, \text{ 則 } (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (1.1)$$

一般來講，若 $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ ，則算術平均數為

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

幾何平均數為

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

我們有

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = G_n$$

“=”成立，若且唯若 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

平均值不等式的證明

※顯然，當至少一個 $a_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$ 時， $G_n = 0$ ，而 $A_n \geq 0$ ，不等式恆成立。以下討論假設 $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$

【證明一】(數學歸納法一)

(1) $n = 2$ 時，由(1.1)式，不等式成立

(2) 假設 $n = k$ 時，命題成立，即

$$A_k = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k} = G_k, k \geq 2$$

則，當 $n = k + 1$ 時，

$$A_{k+1} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1}}{k+1}, G_{k+1} = \sqrt[k+1]{a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1}}$$

由於任意的 $a_i, a_j (i \neq j, 1 \leq i, j \leq n)$ 對調， A_{k+1} 與 G_{k+1} 的值均不變，所以我們假設 $a_1 = \min\{a_1, a_2, \dots, a_{k+1}\}$ ，且 $a_{k+1} = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{k+1}\}$

顯然， $a_1 \leq A_{k+1} \leq a_{k+1}$ 且 $a_1 \leq G_{k+1} \leq a_{k+1}$

可得 $(a_1 - A_{k+1})(A_{k+1} - a_{k+1}) \geq 0$

展開上式，可得

$$A_{k+1}(a_1 + a_{k+1} - A_{k+1}) - a_1 a_{k+1} \geq 0 \quad (1.2)$$

現在對 k 個正值常數 $a_2, a_3, \dots, a_k, (a_1 + a_{k+1} - A_{k+1})$ ，可得

$$\frac{a_2 + a_3 + \dots + a_k + (a_1 + a_{k+1} - A_{k+1})}{k} \geq \sqrt[k]{a_2 a_3 \dots a_k (a_1 + a_{k+1} - A_{k+1})} \quad (1.3)$$

(1.3)式等號左邊

$$\begin{aligned}\frac{a_2 + a_3 + \cdots + a_k + (a_1 + a_{k+1} - A_{k+1})}{k} &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1} - A_{k+1}}{k} \\ &= \frac{(k+1)A_{k+1} - A_{k+1}}{k} = A_{k+1}\end{aligned}$$

故(1.3)式可寫成

$$A_{k+1} \geq \sqrt[k]{a_2 a_3 \cdots a_k (a_1 + a_{k+1} - A_{k+1})}$$

即

$$A_{k+1}^k \geq a_2 a_3 \cdots a_k (a_1 + a_{k+1} - A_{k+1})$$

兩邊同乘以 A_{k+1} ，得

$$A_{k+1}^{k+1} \geq a_2 a_3 \cdots a_k (a_1 + a_{k+1} - A_{k+1}) A_{k+1}$$

由(1.2)式，得

$$A_{k+1}^{k+1} \geq a_2 a_3 \cdots a_k (a_1 + a_{k+1} - A_{k+1}) A_{k+1} \geq a_2 a_3 \cdots a_k (a_1 a_{k+1}) = G_{k+1}^{k+1}$$

故 $A_{k+1} \geq G_{k+1}$

得證

【證明二】(數學歸納法二)

(1) $n = 2$ 時，由(1.1)式，不等式成立

(2) 假設 $n = k$ 時，命題成立，即

$$A_k = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k} = G_k, k \geq 2$$

則，當 $n = k + 1$ 時，

$$\begin{aligned}a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} &= a_1 + a_2 + \cdots + a_k + (a_{k+1} + G_{k+1} + \cdots + G_{k+1}) - (k-1)G_{k+1} \\ &\geq k\sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k} + k\sqrt[k]{a_{k+1} G_{k+1}^{k-1}} - (k-1)G_{k+1} \\ &\geq 2k\sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k} \sqrt[k]{a_{k+1} G_{k+1}^{k-1}} - (k-1)G_{k+1} \\ &= 2k\sqrt[2k]{a_1 a_2 \cdots a_{k+1} G_{k+1}^{k-1}} - (k-1)G_{k+1} \\ &= 2k\sqrt[2k]{G_{k+1}^{k+1} G_{k+1}^{k-1}} - (k-1)G_{k+1} = (k+1)G_{k+1}\end{aligned}$$

故 $A_{k+1} \geq G_{k+1}$

得證

【證明三】(數學歸納法三)

(1) $n = 2$ 時，由(1.1)式，不等式成立

(2) 假設當 $n = k$ 時，結論成立。即

$$A_k = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k} = G_k, k \geq 2$$

則，當 $n = k + 1$ 時，

$$A_{k+1} = \frac{1}{2k} [(k+1)A_{k+1} + (k-1)A_{k+1}] = \frac{1}{2k} [a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1} + A_{k+1} + \cdots + A_{k+1}] \geq \frac{1}{2k} (k^k \sqrt[k]{a_1 \cdots a_k} + k^k \sqrt[k]{a_{k+1} A_{k+1}^{k-1}}) \geq \sqrt[2k]{a_1 \cdots a_{k+1} A_{k+1}^{k-1}}$$

$$\text{所以 } A_{k+1}^{2k} \geq a_1 \cdots a_{k+1} A_{k+1}^{k-1} \Rightarrow A_{k+1}^{k+1} \geq a_1 \cdots a_{k+1}$$

故得證

【證明四】(構造數列)

$$\text{令 } f(n) = n \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \right)$$

若能證明 $f(n)$ 是單調遞增的，由 $f(2) \geq 0$ 可得 $f(n) \geq f(2) \geq 0$

可得證

$$\begin{aligned} f(n+1) - f(n) &= (n+1) \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1}}{n+1} - \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \cdots a_{n+1}} \right) \\ &\quad - n \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \right) \\ &= a_{n+1} - (n+1) \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \cdots a_{n+1}} + n \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \end{aligned}$$

$$\text{令 } x^{n+1} = a_{n+1}, y^{n(n+1)} = a_1 a_2 \cdots a_n$$

則上式可改為

$$\begin{aligned} f(n+1) - f(n) &= x^{n+1} - (n+1)y^n x + n y^{n+1} = x(x^n - y^n) - n y^n (x - y) \\ &= (x - y)[x(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1}) - n y^n] \\ &= (x - y)[(x^n - y^n) + (x^{n-1} - y^{n-1})y + \cdots + (x - y)y^{n-1}] \geq 0 \end{aligned}$$

因為 $(x - y)(x^k - y^k) \geq 0, k \geq 1$

故得證。

1.2 排序不等式

兩個數列 $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ 滿足 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ 且 $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$
則

$$\begin{aligned} & a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \text{ (同序乘積之和)} \\ & \geq a_1 b_{j_1} + a_2 b_{j_2} + \dots + a_n b_{j_n} \text{ (亂序乘積之和)} \\ & \geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 \text{ (反序乘積之和)} \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

其中 j_1, \dots, j_n 為 $1, 2, \dots, n$ 的任意排列。且等號只在 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 或 $b_1 = b_2 = \dots = b_n$ 時成立。

【證】

令 $A = a_1 b_{j_1} + a_2 b_{j_2} + \dots + a_n b_{j_n}$

若 $j_n \neq n$ ，且假設 b_n 所在的項為 $a_{j_m} b_n$ ，由 $(a_n - a_{j_m})(b_n - b_{j_n}) \geq 0$ ，得

$$a_n b_n + a_{j_m} b_{j_n} \geq a_{j_m} b_n + a_n b_{j_n}$$

即，若 $j_n \neq n$ 時，對調 b_n 與 b_{j_n} 的位置，其餘不動，得到 A_1 ，則 $A_1 \geq A$ 。

接著，若 $j_{n-1} \neq n-1$ 時，比照上述的方法，得到

$$a_{n-1} b_{n-1} + a_{j_m} b_{j_{n-1}} \geq a_{j_m} b_{n-1} + a_{n-1} b_{j_{n-1}}$$

對調 b_{n-1} 與 $b_{j_{n-1}}$ 的位置，其餘不動，得到 A_2 ，則 $A_2 \geq A_1 \geq A$ 。

依此，重複進行，最後可得

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq A$$

(若某些 $j_k = k$ ，則跳過不進行對調)

同理可證

$$A \geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1$$

顯然 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 且 $b_1 = b_2 = \dots = b_n$ 時，等式成立

若 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 及 $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ 不完全相等時，必有

$a_1 < a_n$ 且 $b_1 < b_n$ ，由前面的結果可知

$$a_1 b_1 + a_n b_n > a_1 b_n + a_n b_1$$

且

$$a_2 b_2 + \dots + a_{n-1} b_{n-1} \geq a_2 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_2$$

可得

$$a_1 b_1 + \dots + a_n b_n > a_1 b_n + \dots + a_n b_1$$

即(1.2.1)式的兩個等式至少有一個不成立。

【利用排序不等式證明平均值不等式】

不常其一般性，假設 $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$

令 $y_k = \frac{a_1 \times \dots \times a_k}{G_n^k}, k = 1, 2, \dots, n$.

由排序不等式，得

$$y_1 \times \frac{1}{y_1} + \cdots + y_n \times \frac{1}{y_n} \leq y_1 \times \frac{1}{y_n} + y_2 \times \frac{1}{y_1} \cdots + y_n \times \frac{1}{y_{n-1}}$$

(反序乘積之和 \leq 亂序乘積之和)

$$= \frac{a_1}{G_n} \times \frac{G_n^n}{G_n^n} + \frac{a_1 a_2}{G_n^2} \frac{G_n^1}{a_1} + \cdots + \frac{G_n^n}{G_n^n} \frac{G_n^{n-1}}{a_1 \times \cdots \times a_{n-1}} = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{G_n}$$

得證

當 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ ， $A_n = G_n$

若 a_1, \dots, a_n 不全等，假設 $a_1 \neq a_2$ ，令 $b = \frac{a_1 + a_2}{2}$ ，則 $a_1 a_2 < b^2, a_1 + a_2 = b + b$

得

$$G_n < \sqrt[n]{b \times b \times a_3 \times \cdots \times a_n} \leq \frac{b + b + a_3 \times \cdots \times a_n}{n} = A_n$$

故 $A_n = G_n$ 只在 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 時成立

1.3 契比雪夫不等式

設 $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ 滿足 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ 且 $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$

則

$$\sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \sum_{k=1}^n b_k \leq \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

且等號只在 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 或 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$ 時成立。

【證】

顯然

$$\begin{aligned} n \sum_{k=1}^n a_k b_k - \sum_{k=1}^n a_k \sum_{k=1}^n b_k &= \sum_{k=1}^n \left(a_k \left(n b_k - \sum_{j=1}^n b_j \right) \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n (a_k b_k - a_k b_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (a_j b_j - a_j b_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n (a_k b_k + a_j b_j - a_k b_j - a_j b_k) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n (a_k - a_j)(b_k - b_j) \geq 0 \end{aligned}$$

(因為最後一項的 $(a_k - a_j)$ 和 $(b_k - b_j)$ 會是同號或0)

同上，改寫為

$$\begin{aligned}
n \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1} - \sum_{k=1}^n a_k \sum_{k=1}^n b_{n-k+1} &= \sum_{k=1}^n \left(a_k \left(n b_{n-k+1} - \sum_{j=1}^n b_{n-j+1} \right) \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n (a_k b_{n-k+1} - a_k b_{n-j+1}) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (a_j b_{n-j+1} - a_j b_{n-k+1}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n (a_k b_{n-k+1} + a_j b_{n-j+1} - a_k b_{n-j+1} - a_j b_{n-k+1}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n (a_k - a_j)(b_{n-k+1} - b_{n-j+1}) \leq 0
\end{aligned}$$

另外，也可由排序不等式得證：

$$\sum_{k=1}^n a_k \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n a_k (b_1 + \cdots + b_n)$$

可拆解成 n 個不同的 $a_1 b_{j_1} + a_2 b_{j_2} + \cdots + a_n b_{j_n}$ 的和，由排序不等式得證。

二、 平均值不等式的應用

【例 1】 $a, b \in R^+, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ ，則對所有正整數 n ，

$$(a+b)^n - a^n - b^n \geq 2^{2n} - 2^{n+1}$$

【解】

$n=1$ 時成立，假設 $n=k$ 時也成立，則當 $n=k+1$ 時

由 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ ，得 $a+b=ab$ ，故 $ab=a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ，即 $ab=a+b \geq 4$ ，得

$$\begin{aligned}
(a+b)^{k+1} - a^{k+1} - b^{k+1} &= (a+b)[(a+b)^k - a^k - b^k] + a^k b + ab^k \\
&\geq 4[2^{2k} - 2^{k+1}] + 2\sqrt{a^{k+1}b^{k+1}} \geq 2^{2k+2} - 2^{k+3} + 2^{k+2} \\
&= 2^{2(k+1)} - 2^{(k+1)+1}
\end{aligned}$$

【例 2】 $a, b, c \in R^+$ ，試證

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2$$

【解】

由平均值不等式，得

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{b} \frac{a}{c} \leq \frac{1}{2} \left[\left(\frac{c}{b}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 \right], \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \frac{b}{a} \leq \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \right], \frac{c}{a} = \frac{b}{a} \frac{c}{b} \leq \frac{1}{2} \left[\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 \right]$$

三式相加，得證

【例 3】

假設 n 是大於等於 3 的自然數，給定實數 a_1, \dots, a_n ，令

$$m = \min\{|a_i - a_j|, 1 \leq i < j \leq n\}$$

求條件 $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$ 下， m 的最大值。

【解】

不失其一般性，假設 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ ，則 $a_j - a_i \geq (j - i)m$

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2 &= (n-1) \sum_{i=1}^n a_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \\ &= (n-1) \sum_{i=1}^n a_i^2 - \left[\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2 \right] \leq n \sum_{i=1}^n a_i^2 = n \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2 &\geq m^2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)^2 = m^2 \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)k^2 \\ &= m^2 n \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - m^2 \sum_{k=1}^{n-1} k^3 \\ &= m^2 n \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} - m^2 \frac{(n-1)^2 n^2}{4} \\ &= m^2 n^2 (n-1) \frac{4n-2-3n+3}{12} = \frac{m^2 n^2 (n^2-1)}{12} \end{aligned}$$

所以 $n \geq \frac{m^2 n^2 (n^2-1)}{12}$ ，得 $m \leq \sqrt{\frac{12}{n(n^2-1)}}$

當 a_1, \dots, a_n 是等差數列，且 $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ 時，等號成立。故 m 的最大值為 $\sqrt{\frac{12}{n(n^2-1)}}$

【例 4】

$$f(x) = \frac{a}{a^2 - 1} (a^x - a^{-x}) (a > 0, a \neq 1)$$

試證：對正整數 $n \geq 2$ ，有 $f(n) > n$

【證】

$n \geq 2$ ，由平均值不等式

$$\begin{aligned}
f(n) &= \frac{a}{a^2-1}(a^n - a^{-n}) = \frac{a}{a^2-1}\left(a^n - \frac{1}{a^n}\right) \\
&= \frac{a}{a^2-1}\left(a - \frac{1}{a}\right)\left(a^{n-1} + a^{n-2}\frac{1}{a} + a^{n-3}\frac{1}{a^2} + \cdots + \frac{1}{a^{n-1}}\right) \\
&\geq \frac{a}{a^2-1}\left(a - \frac{1}{a}\right)n \sqrt[n]{a^{n-1}a^{n-2} \times \cdots \times a \times \frac{1}{a} \times \cdots \times \frac{1}{a^{n-1}}} = n
\end{aligned}$$

(附註： $f(1) = 1$)

【例 5】設 $x > 0$ ，試證 $2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \geq 2 \times 2^{\sqrt[6]{x}}$

【證】

由平均值不等式

$$2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \geq 2\sqrt[2]{2^{\sqrt[12]{x} + \sqrt[4]{x}}} = 2 \times 2^{\frac{\sqrt[12]{x} + \sqrt[4]{x}}{2}} \geq 2 \times 2^{\sqrt[12]{x \cdot x^3}} = 2 \times 2^{\sqrt[6]{x}}$$

【例 6】 $a_i > 0, i = 1, 2, \dots, n; a_1 \times \cdots \times a_n = 1$ ，試證

$$(2 + a_1) \times (2 + a_2) \times \cdots \times (2 + a_n) \geq 3^n$$

【證】

$$\text{由 } 2 + a_i = 1 + 1 + a_i \geq 3\sqrt[3]{a_i}$$

得

$$(2 + a_1) \times (2 + a_2) \times \cdots \times (2 + a_n) \geq 3^n \sqrt[n]{a_1 \times \cdots \times a_n} = 3^n$$

【例 7】已知 $x + y + z = 0$ ，試證

$$6(x^3 + y^3 + z^3)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2)^3$$

【證】

因 $x + y + z = 0$ ，不失其一般性，假設 $xy \geq 0$ ， $z = -x - y = -(x + y)$

故 $z^2 = (x + y)^2$ ，可得

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 8(x^2 + xy + y^2)^3$$

其中

$$\begin{aligned}
x^2 + xy + y^2 &= \frac{x(x+y)}{2} + \frac{y(x+y)}{2} + \frac{x^2+y^2}{2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{xy(x+y)^2}{4} \cdot \frac{x^2+y^2}{2}} \\
&\geq 3\sqrt[3]{\frac{xy(x+y)^2}{4}} \cdot xy = 3\sqrt[3]{\frac{x^2y^2z^2}{4}}
\end{aligned}$$

故

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 \geq 8 \times \frac{27}{4} x^2 y^2 z^2 = 54 \times \frac{(x^3 + y^3 + z^3)^2}{9} = 6(x^3 + y^3 + z^3)^2$$

(附註： $(x^3 + y^3 + z^3)^2 = (-3x^2y - 3xy^2)^2 = 9(xy(x+y))^2 = 9x^2y^2z^2$)

【例 8】假設 $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ 均為正值且滿足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq 1, b_1 + b_2 + \dots + b_n \leq n$ 。試證：

$$\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1}\right) \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2}\right) \cdots \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}\right) \geq (n+1)^n$$

【證】由平均值不等式與假設

$$a_1 \times \cdots \times a_n \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^n \leq \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$b_1 \times \cdots \times b_n \leq \left(\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}\right)^n \leq 1$$

又

$$\frac{1}{a_i} + \frac{1}{b_i} = \frac{1}{na_i} + \cdots + \frac{1}{na_i} + \frac{1}{b_i} \geq (n+1)^{n+1} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{na_i}\right)^n \frac{1}{b_i}}$$

可得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1}\right) \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2}\right) \cdots \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}\right) \\ & \geq (n+1)^n \sqrt[n+1]{\left(\frac{1}{n^n}\right)^n \frac{1}{(a_1 \times \cdots \times a_n)^n} \frac{1}{b_1 \times \cdots \times b_n}} \geq (n+1)^n \end{aligned}$$

【例 9】 $a, b, c \in R^+$ ，試證

$$abc \geq (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$$

【證】

(1) 若 $(a+b-c), (a+c-b), (b+c-a)$ 有負值，假設 $a+b-c < 0$

則 $c > a+b$ ，即 $(a+c-b), (b+c-a)$ 均為正值

此時 $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) < 0$

不等式成立

(2) $(a+b-c), (a+c-b), (b+c-a)$ 均為非負值，則由平均值不等式，得

$$\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)} \leq \frac{(a+b-c) + (b+c-a)}{2} = b$$

$$\sqrt{(a+c-b)(b+c-a)} \leq \frac{(a+c-b) + (b+c-a)}{2} = c$$

$$\sqrt{(a+b-c)(a+c-b)} \leq \frac{(a+b-c) + (a+c-b)}{2} = a$$

三式相乘，得證

【例 10】 $a, b, c \in R^+$ ，試證

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

【證】

若能證明 $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{a^{4/3}}{a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}}$ 則可得證

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{a^{4/3}}{a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}} \text{ 等價於 } (a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3})^2 \geq a^{2/3}(a^2+8bc)$$

由平均值不等式

$$\begin{aligned} (a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3})^2 - \left(a^{\frac{4}{3}}\right)^2 &= \left(b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)\left(a^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right) \\ &\geq 2b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}} \times 4\left(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}\right) = 8a^{\frac{2}{3}}bc \end{aligned}$$

可得

$$(a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3})^2 \geq \left(a^{\frac{4}{3}}\right)^2 + 8a^{\frac{2}{3}}bc = a^{\frac{2}{3}}(a^2+8bc)$$

可得

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{a^{4/3}}{a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}}$$

同理可得

$$\begin{aligned} \frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}} &\geq \frac{b^{4/3}}{a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}} \\ \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} &\geq \frac{c^{4/3}}{a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}} \end{aligned}$$

得證

【例 11】 $a, b, c \in R^+$ ，求

$$\frac{a+3c}{a+2b+c} + \frac{4b}{a+b+2c} - \frac{8c}{a+b+3c}$$

的最小值

【解法 1】

$$\text{令 } x = a + 2b + c, y = a + b + 2c, z = a + b + 3c$$

可得

$$x - y = b - c, z - y = c$$

由此得

$$\begin{aligned}
a+3c &= 2y-x, b=z+x-2y, c=z-y \\
\frac{a+3c}{a+2b+c} + \frac{4b}{a+b+2c} - \frac{8c}{a+b+3c} &= \frac{2y-x}{x} + \frac{4(z+x-2y)}{y} - \frac{8(z-y)}{z} \\
&= -17 + 2\frac{y}{x} + 4\frac{x}{y} + 4\frac{z}{y} + 8\frac{y}{z} \geq -17 + 2\sqrt{8} + 2\sqrt{32} \\
&= -17 + 12\sqrt{2}
\end{aligned}$$

【解法 2】

假設 $a+b+c=1$, 則

$$\begin{aligned}
\frac{a+3c}{a+2b+c} + \frac{4b}{a+b+2c} - \frac{8c}{a+b+3c} &= \frac{1-b+2c}{1+b} + \frac{4b}{1+c} - \frac{8c}{1+2c} \\
&= -1 + \frac{2+2c}{1+b} + \frac{4+4b}{1+c} - \frac{4}{1+c} + \frac{4}{1+2c} - 4 \\
&= -5 + 2\frac{1+c}{1+b} + 4\frac{1+b}{1+c} - \frac{4c}{1+3c+2c^2} \\
&\geq -5 + 2\sqrt{8} - \frac{4}{\frac{1}{c}+3+2c} \geq -5 + 4\sqrt{2} - \frac{4}{3+2\sqrt{2}} \\
&= -5 + 4\sqrt{2} - \frac{4(3-2\sqrt{2})}{9-8} = -17 + 12\sqrt{2}
\end{aligned}$$

【例 12】 $a, b, c \in R^+$ 且 $abc=1$, 求 $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)$ 的最大值

【解】

當 $a=b=c=1$ 時, $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)=1$

由於 $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)$ 是對稱的, 我們嘗試證明

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leq 1$$

令 $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$, 則上式相當於證明

$$(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y) \leq xyz$$

令 $u=x-y+z, v=y-z+x, w=z-x+y$

u, v, w 任兩個之和為正, 最多只有一個為負, 有負值時, 不等式一定成立。

故只考慮均為正的情形

由平均值不等式,

$$\sqrt{uv} = \sqrt{(x-y+z)(y-z+x)} \leq \frac{2x}{2} = x$$

$$\sqrt{vw} = \sqrt{(z-x+y)(y-z+x)} \leq \frac{2y}{2} = y$$

$$\sqrt{uw} = \sqrt{(x-y+z)(z-x+y)} \leq \frac{2z}{2} = z$$

三式相乘，得證。

【例 13】設 P 為 $\triangle ABC$ 內一點， D, E, F 分別為 P 到 BC, AB, CA 各邊的垂足，試找出讓 $PD \times PE \times PF$ 最大的 P

【解】

$\triangle ABC$ 內角分別為 A, B, C ，對邊分別為 a, b, c ，又假設 $\triangle ABC$ 面積為 S

設 $PD = x, PE = y, PF = z$ ，

$$S_1(\triangle PBC \text{ 面積}) = \frac{1}{2}ax, S_2(\triangle PCA \text{ 面積}) = \frac{1}{2}by, S_3(\triangle PAB \text{ 面積}) = \frac{1}{2}cz$$

所以有 $ax + by + cz = 2(S_1 + S_2 + S_3) = 2S$

由平均值不等式

$$ax \times by \times cz \leq \left(\frac{ax + by + cz}{3} \right)^3 = \left(\frac{2S}{3} \right)^3$$

即

$$xyz \leq \frac{8S^3}{27abc}$$

等號只在 $ax = by = cz$ 時成立。即 $S_1 = S_2 = S_3 = \frac{1}{3}S$ 時 xyz 最大，即 P 為 $\triangle ABC$ 的重心。

【例 14】證明： $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

【證】由平均值不等式

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n} \times \sqrt{n} \times 1 \times \cdots \times 1} \leq \frac{1}{n}(2\sqrt{n} + n - 2) = 1 + 2 \times \frac{\sqrt{n} - 1}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$$

可得

$$0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}}$$

顯然不等式的右邊在 n 趨近無窮大時，會趨近於 0
得證

【例 15】 $0 < a_1 < 3$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n(3 - a_n)}$. 試證：數列 $\{a_n\}$ 單調遞增，且有上界

【證】

$0 < a_1 < 3$ ，所以 $a_1(3 - a_1) > 0$ ，由平均值不等式，

$$0 < a_2 = \sqrt{a_1(3 - a_1)} \leq \frac{3}{2}$$

若 $a_k \leq \frac{3}{2}$ ，則

$$0 < a_{k+1} = \sqrt{a_k(3 - a_k)} \leq \frac{3}{2}$$

由數學歸納法， $\{a_n\}$ 有上界，又對任意 $n > 1$

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n(3 - a_n)} - a_n = \sqrt{a_n}(\sqrt{3 - a_n} - \sqrt{a_n}) = \frac{\sqrt{a_n}(3 - 2a_n)}{\sqrt{3 - a_n} + \sqrt{a_n}} \geq 0$$

故 $\{a_n\}$ 單調遞增。得證

三、柯西不等式

設 $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ 是任意實數，則

$$(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

等號只在 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ 時成立

【證明一】

令 $A_n = \sum_{i=1}^n a_i^2 \neq 0, C_n = \sum_{i=1}^n b_i^2 \neq 0$,

$$x_i = \frac{a_i}{\sqrt{A_n}}, y_i = \frac{b_i}{\sqrt{C_n}}$$

則 $\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1$

原不等式等價於 $\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq 1$

即 $2 \sum_{i=1}^n x_i y_i \leq 1 + 1 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2$

此式又等價於 $\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \geq 0$

此式顯然成立

等號成立的充要條件是 $x_i = y_i, i = 1, 2, \dots, n$

得原不等式成立，且等號成立的充要件是 $b_i = ka_i, k = \frac{\sqrt{C_n}}{\sqrt{A_n}}$

【證明二】(比值法)

令 $x_i = \frac{|a_i|}{\sqrt{A_n}}, y_i = \frac{|b_i|}{\sqrt{C_n}}$ ，則 $\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1$

$$\frac{|\sum_{i=1}^n a_i b_i|}{\sqrt{A_n} \sqrt{C_n}} \leq \sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (x_i^2 + y_i^2) = 1$$

且等號成立的充要條件是

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| = \sum_{i=1}^n |a_i b_i|$$

$$\frac{a_i^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2} = \frac{b_i^2}{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

第一個條件是 $a_i b_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$

第二個條件是 $\frac{|a_i|}{|b_i|} = k, i = 1, 2, \dots, n; k$ 是常數

這兩個條件等價於 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$

【證明三】(比值法二)

令 $A_n = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2, B_n = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n, C_n = b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2$

則

$$\frac{A_n C_n}{B_n^2} + 1 = \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2 C_n}{B_n^2} + \sum_{i=1}^n \frac{b_i^2}{C_n} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i^2 C_n}{B_n^2} + \frac{b_i^2}{C_n} \right) \geq 2 \sum_{i=1}^n \frac{|a_i b_i|}{|B_n|} \geq 2$$

所以

$$\frac{A_n C_n}{B_n^2} \geq 1$$

即 $B_n^2 \leq A_n C_n$

等號只在 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ 為時成立

【證明四】(歸納法)

直接證更強的結果： $\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$

(1) $n = 2$

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 = a_1^2 b_1^2 + 2 a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_2^2 \leq a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

等號只在 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ 時成立

(2) $n = k$ 時命題成立，則當 $n = k + 1$ 時

$$\begin{aligned}\sqrt{\sum_{i=1}^{k+1} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{k+1} b_i^2} &= \sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2 + a_{k+1}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^k b_i^2 + b_{k+1}^2} \\ &\geq \sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^k b_i^2} + |a_{k+1} b_{k+1}| \geq \sum_{i=1}^k |a_i b_i| + |a_{k+1} b_{k+1}|\end{aligned}$$

(上式不等式由 $n = 2$, $c_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2}$, $d_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^k b_i^2}$, $c_2 = |a_{k+1}|$, $d_2 = |b_{k+1}|$
 $(c_1 d_1 + c_2 d_2)^2 \leq (c_1^2 + c_2^2)(d_1^2 + d_2^2)$

可得)

得證

【證明五】(內積法)

令 $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$, $\beta = (b_1, \dots, b_n)$, 對任意實數 t

$$0 \leq (\alpha + t\beta) \cdot (\alpha + t\beta) = \alpha \cdot \alpha + 2\alpha \cdot \beta t + \beta \cdot \beta t^2$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2t \sum_{i=1}^n a_i b_i + t^2 \sum_{i=1}^n b_i^2$$

t 是任意實數, 所以

$$(\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \leq 0$$

得證

四、柯西不等式的應用

【例 1】 $a, b, c \in R^+$ 且 $a + b + c = 1$, 求證

$$\frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} \geq 36$$

【證】由柯西不等式, 得

$$\frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} = \left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} \right) (a + b + c) \geq \left(\sqrt{a} \times \frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{b} \times \frac{2}{\sqrt{b}} + \sqrt{c} \times \frac{3}{\sqrt{c}} \right)^2 = 36$$

【例 2】 $a, b, c \in R^+$ 且 $a \cos^2 \alpha + b \sin^2 \alpha < c$, 求證

$$\sqrt{a} \cos^2 \alpha + \sqrt{b} \sin^2 \alpha < \sqrt{c}$$

【證】由柯西不等式, 得

$$\begin{aligned}
\sqrt{a}\cos^2\alpha + \sqrt{b}\sin^2\alpha &= \sqrt{a}\cos\alpha \times \cos\alpha + \sqrt{b}\sin\alpha \times \sin\alpha \\
&\leq \left[(\sqrt{a}\cos\alpha)^2 + (\sqrt{b}\sin\alpha)^2 \right]^{\frac{1}{2}} (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}} \\
&= [a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha]^{\frac{1}{2}} < \sqrt{c}
\end{aligned}$$

【例3】設 $a_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ 且 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ 。求證

$$\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} \geq \frac{1}{2}$$

【證】

令 $a_{n+1} = a_1$ ，由柯西不等式，得

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\sqrt{a_i + a_{i+1}}} \times \sqrt{a_i + a_{i+1}} \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{a_i + a_{i+1}} \times \sum_{i=1}^n (a_i + a_{i+1}) \\
&= 2 \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{a_i + a_{i+1}} \times \sum_{i=1}^n a_i \\
&\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{a_i + a_{i+1}} \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

【例4】 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ， n 是自然數。求證

$$\left(\frac{1 - \sin^{2n}x}{\sin^{2n}x} \right) \left(\frac{1 - \cos^{2n}x}{\cos^{2n}x} \right) \geq (2^n - 1)^2$$

【證】

$$\begin{aligned}
1 - \sin^{2n}x &= (1 - \sin^2x)(1 + \sin^2x + \sin^4x + \dots + \sin^{2(n-1)}x) \\
&= \cos^2x(1 + \sin^2x + \sin^4x + \dots + \sin^{2(n-1)}x) \\
1 - \cos^{2n}x &= (1 - \cos^2x)(1 + \cos^2x + \cos^4x + \dots + \cos^{2(n-1)}x) \\
&= \sin^2x(1 + \cos^2x + \cos^4x + \dots + \cos^{2(n-1)}x)
\end{aligned}$$

由柯西不等式

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1 - \sin^{2n}x}{\sin^{2n}x} \right) \left(\frac{1 - \cos^{2n}x}{\cos^{2n}x} \right) \\
&= \frac{1}{\sin^{2n-2}x} (1 + \sin^2x + \sin^4x + \cdots + \sin^{2(n-1)}x) \\
&\times \frac{1}{\cos^{2n}x} (1 + \cos^2x + \cos^4x + \cdots + \cos^{2(n-1)}x) \\
&= \left(1 + \frac{1}{\sin^2x} + \frac{1}{\sin^4x} + \cdots + \frac{1}{\sin^{2n-2}x} \right) \left(1 + \frac{1}{\cos^2x} + \frac{1}{\cos^4x} + \cdots \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\cos^{2n-2}x} \right) \\
&\geq \left[1 + \frac{1}{\sin x \cos x} + \frac{1}{(\sin x \cos x)^2} + \cdots + \frac{1}{(\sin x \cos x)^{n-1}} \right]^2 \\
&= \left[1 + \frac{2}{\sin 2x} + \frac{4}{(\sin 2x)^4} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{(\sin 2x)^{n-1}} \right]^2 \\
&\geq (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1})^2 = (2^n - 1)^2
\end{aligned}$$

【例 5】 $a_i \in R^+, i = 1, 2, \dots, n$ 。證明：

$$\frac{1}{\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \cdots + \frac{1}{1+a_n}} - \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \geq \frac{1}{n}$$

【證】

令 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} = a$ ，則 $\sum_{i=1}^n \frac{a_i+1}{a_i} = n + a$ 。由柯西不等式

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1+a_i} \times \sum_{i=1}^n \frac{a_i+1}{a_i} \geq n^2$$

所以 $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1+a_i} \geq \frac{n^2}{n+a}$ 及

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+a_i} = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{a_i}{1+a_i} \right) = n - \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1+a_i} \leq n - \frac{n^2}{n+a} = \frac{na}{n+a}$$

可得

$$\frac{1}{\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \cdots + \frac{1}{1+a_n}} - \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \geq \frac{1}{\frac{na}{n+a}} - \frac{1}{a} = \frac{n+a-n}{na} = \frac{1}{n}$$

【例 6】證明滿足條件

$$(1) \sum_{i=1}^n a_i \geq n^2 \quad (2) \sum_{i=1}^n a_i^2 \leq n^3 + 1$$

的整數 a_1, a_2, \dots, a_n 只有 $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (n, n, \dots, n)$

【證】

由柯西不等式

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \geq \frac{n^4}{n} = n^3$$

又已知 $\sum_{i=1}^n a_i^2 \leq n^3 + 1$

在 a_1, a_2, \dots, a_n 都是整數的假設下，只有 $\sum_{i=1}^n a_i^2 = n^3$ 或 $\sum_{i=1}^n a_i^2 = n^3 + 1$ 兩種可能

$\sum_{i=1}^n a_i^2 = n^3$ 時，等號只在 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 成立，即 $a_i^2 = n^2, i = 1, 2, \dots, n$

由設(1)， $\sum_{i=1}^n a_i \geq n^2$ ， a_i 非負，故 $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (n, n, \dots, n)$

$\sum_{i=1}^n a_i^2 = n^3 + 1$ 時，令 $b_i = a_i - n, i = 1, 2, \dots, n$

$$\sum_{i=1}^n b_i^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 - 2n \sum_{i=1}^n a_i + n^3 = 2n^3 + 1 - 2n \sum_{i=1}^n a_i \leq 1$$

故 b_i^2 最多只有一個為 1，其餘為 0

若全為 0， $a_i = n, i = 1, 2, \dots, n$ ， $\sum_{i=1}^n a_i^2 = n^3 < n^3 + 1$ 矛盾

若 b_i^2 只有一個為 1，其餘為 0，

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 = (n \pm 1)^2 + n^2(n-1) = n^3 \pm 2n + 1 \neq n^3 + 1$$

矛盾。故只有 $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (n, n, \dots, n)$ 為唯一整數解

【例 7】 $a, b, c, x, y, z \in R$ ，且

$$a^2 + b^2 + c^2 = 25, x^2 + y^2 + z^2 = 36, ax + by + cz = 30$$

求 $\frac{a+b+c}{x+y+z}$ 的值

【解】

由柯西不等式，得

$$25 \times 36 = (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2 = 30^2$$

等號成立時， $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = k$ 。即 $k^2(x^2 + y^2 + z^2) = 25$ ，故 $k = \pm \frac{5}{6}$ (負不合，因

$$ax + by + cz = 30)$$

可得

$$\frac{a+b+c}{x+y+z} = k = \frac{5}{6}$$

【例 8】 x, y, z 是大於 -1 的實數，求

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2} + \frac{1+y^2}{1+z+x^2} + \frac{1+z^2}{1+x+y^2}$$

的最小值

【解】

由於 x, y, z 是大於 -1 ，

$\frac{1+x^2}{1+y+z^2}, \frac{1+y^2}{1+z+x^2}, \frac{1+z^2}{1+x+y^2}$ 的分子、分母均為正值，故

$$\begin{aligned} & \frac{1+x^2}{1+y+z^2} + \frac{1+y^2}{1+z+x^2} + \frac{1+z^2}{1+x+y^2} \\ & \geq \frac{1+x^2}{1+z^2 + \frac{1+y^2}{2}} + \frac{1+y^2}{1+x^2 + \frac{1+z^2}{2}} + \frac{1+z^2}{1+y^2 + \frac{1+x^2}{2}} \\ & = \frac{2a}{2c+b} + \frac{2b}{2a+c} + \frac{2c}{2b+a} \end{aligned}$$

其中

$$a = \frac{1+x^2}{2}, b = \frac{1+y^2}{2}, c = \frac{1+z^2}{2}$$

由柯西不等式，得

$$\begin{aligned} \frac{a}{2c+b} + \frac{b}{2a+c} + \frac{c}{2b+a} &= \left(\sqrt{\frac{a}{2c+b}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{b}{2a+c}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{c}{2b+a}} \right)^2 \\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{\left(\sqrt{a(b+2c)} \right)^2 + \left(\sqrt{b(c+2a)} \right)^2 + \left(\sqrt{c(a+2b)} \right)^2} \\ &= \frac{(a+b+c)^2}{a(b+2c) + b(c+2a) + c(a+2b)} \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac}{3(ab+bc+ac)} \\ &= 1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac}{3(ab+bc+ac)} \\ &= 1 + \frac{\frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2]}{3(ab+bc+ac)} \geq 1 \end{aligned}$$

上式等號只在 $a = b = c$ 時成立

故最小值為 2

【例 9】在一群數學家中，每個人都有一些朋友(關係是互相的)。證明：存在一個數學家他所有的朋友的「朋友人數平均值」不小於這群數學家的「朋友人數平均值」

【解】

令 M 表這群數學家的集合， $n = |M|$ ， $F(m)$ 表數學家 m 的朋友的集合， $f(m)$ 表數學家 m 的朋友人數，即 $f(m) = |F(m)|$

命題等價於證明：必有一個 m_0 使得

$$\frac{1}{f(m_0)} \sum_{m \in F(m_0)} f(m) \geq \frac{1}{n} \sum_{m \in M} f(m)$$

若不存在符合上式的 m_0 ，則對任意 m_0 ，有

$$n \times \sum_{m \in F(m_0)} f(m) < f(m_0) \sum_{m \in M} f(m)$$

對所有 m_0 求和，得

$$\begin{aligned} n \times \sum_{m_0} \sum_{m \in F(m_0)} f(m) &= n \times \sum_m \sum_{m_0 \in F(m)} f(m) = n \sum_m f^2(m) \\ &< \sum_{m_0} f(m_0) \sum_{m \in M} f(m) = \left[\sum_{m \in M} f(m) \right]^2 \end{aligned}$$

與柯西不等式不合，矛盾，故得證。