
八次曲線

Li4

December 6, 2018

其實今天不會講八次曲線啦 (?)

0 仙貝知識

仙貝一般是由烘烤的方式製作，古老的作法是用碳烤。烤好後會再刷上由醬油和味醂製作的醬汁，有時還會加上海苔。在日本，仙貝一般會配合綠茶一起使用，是家常的零食，常用來招待客人，口感硬脆。今天的仙貝可能會用到五辛，分別是內心、重心、外心、垂心跟旁心。值得一提的是，最後一個不是心 (?)

1 有象角

其實大象是沒有角的，不過象角是南極洲的海岬，位於南設得蘭群島的利文斯頓島西部，處於尼科波爾角東南面 12.1 公里、克拉克冰原島峰東南面 3.95 公里、邦德角西南面 3.08 公里、漢娜角西南面 13.2 公里。

Definition 1.1 (有向角). 我們定義兩條直線 ℓ_1, ℓ_2 的有向角為

$$\angle(\ell_1, \ell_2) := \ell_1 \text{ 以 } \ell_1 \cap \ell_2 \text{ 為中心，旋轉至與 } \ell_2 \text{ 重合之旋轉量}$$

顧名思義，有向角就是有方向的角，所以會有正負號的差別。

Definition 1.2. 對於任意兩條平行直線 ℓ_1, ℓ_2 ，記作 $\ell_1 \parallel \ell_2$ ， $\angle(\ell_1, \ell_2) := 0$

Definition 1.3. 對於兩條直線 ℓ_1, ℓ_2 ，若 $\angle(\ell_1, \ell_2) = \frac{\pi}{2}$ ，則我們稱 ℓ_1, ℓ_2 垂直，記作 $\ell_1 \perp \ell_2$ 。

Proposition 1.1. 對於任意三條直線 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 ，我們有 $\angle(\ell_1, \ell_2) + \angle(\ell_2, \ell_3) = \angle(\ell_1, \ell_3)$ 。

然後，這個加法要 mod 180° 。我相信模運算大家都會啦 (?)

Definition 1.4. 對於任意三點 A, B, O ， $\angle AOB := \angle(OA, OB)$ 。

Proposition 1.2. 令 P 為任意一點，則對於三點 $A, B, C \neq P$ ， A, B, C 共線若且唯若 $\angle PAB = \angle PAC$ 。

上面跟下面都滿常用的 (?)

Proposition 1.3. 令 A, B, P, Q 為四點，則 A, B, P, Q 共 (廣義) 圓若且唯若 $\angle APB = \angle AQB$ 。

所謂的廣義圓呢，其實就是圓 + 線。

Example 1 (Reim's). 令 A_1, A_2, B_1, B_2 為共圓四點， C_1 為 A_1B_1 上一點。證明： $\odot(B_1B_2C_1)$ ， A_2B_2 ，跟過 C_1 平行於 B_1B_2 的直線共點。

其實我不會念那個英文字，反正就是平行跟兩個共圓可以換來換去 (?)

Problem 1. 令 A, B, C, D 為共圓四點， A', C' 分別為 A, C 關於 BD 的垂足， B', D' 分別為 B, D 關於 AC 的垂足。證明： A', B', C', D' 共圓。

Example 2 (三圓定理). 給定 $\triangle ABC$ ，設 E, F 分別位於 CA, AB 上， D 為一點。證明： D 在 BC 上若且唯若 $\odot(EAF), \odot(FAD), \odot(DBE)$ 共點。

Problem 2 (密克定理/Miquel's). 令 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ 為任三線不共點的四條直線。證明：其所圍出的四個三角形的外接圓們共點。

這東西太常用了，大家一定要會哦 ><

Definition 1.5. 令 Q 為一個完全四線形 (就是 4 條線 + 6 個它們的交點)，則我們稱由其所圍出的四個三角形的外接圓們所共的點為 Q 的密克點。

Problem 3 (密克圓). 設 Q 是一個完全四線形， M 為其密克點。證明：由 Q 中的四個三角形的外心們與 M 共圓。

2 開個小招

算長度是一個強大的工具 (相較於算角度)，很多題目到最後都只剩算長度。所以有哪些咚咚是可以開的呢 (?)

Theorem 2.1 (角元孟氏). 給定任意 $\triangle ABC$ ，點 D, E, F 分別位於 BC, CA, AB 上， $P \notin BC \cup CA \cup AB$ 為平面上一點，則

$$(i) \ D, E, F \text{ 共線若且唯若 } \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle DAC} \cdot \frac{\sin \angle CBE}{\sin \angle EBA} \cdot \frac{\sin \angle ACF}{\sin \angle FCB} = -1$$

$$(ii) \ D, E, F \text{ 共線若且唯若 } \frac{\sin \angle BPD}{\sin \angle DPC} \cdot \frac{\sin \angle CPE}{\sin \angle EPA} \cdot \frac{\sin \angle APF}{\sin \angle FPB} = -1。$$

Theorem 2.2 (角元西瓦). 給定任意 $\triangle ABC$ ，點 D, E, F 分別位於 BC, CA, AB 上， $P \notin BC \cup CA \cup AB$ 為平面上一點，則

$$(i) \ AD, BE, CF \text{ 共點若且唯若 } \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle DAC} \cdot \frac{\sin \angle CBE}{\sin \angle EBA} \cdot \frac{\sin \angle ACF}{\sin \angle FCB} = 1$$

$$(ii) \ AD, BE, CF \text{ 共點若且唯若 } \frac{\sin \angle BPD}{\sin \angle DPC} \cdot \frac{\sin \angle CPE}{\sin \angle EPA} \cdot \frac{\sin \angle APF}{\sin \angle FPB} = 1。$$

這兩個傢伙是我早期滿愛用的東西，可惜他退流行了(?)

Problem 4. 分別過 A, B, C 作它們關於 $\odot(ABC)$ 的切線們，又分別交 BC, CA, AB 於 \sphericalangle 、 \sphericalangle 、 \sphericalangle 。證明： \sphericalangle 、 \sphericalangle 、 \sphericalangle 共線。

Example 3. 設 $\triangle ABC$ 的內切圓分別切三邊 BC, CA, AB 於 D, E, F 。證明： AD, BE, CF 共點。

Problem 5. 設 A, B, C, D, E, F 為圓上六點 (依序逆時針站得好好的)，而且 AD, BE, CF 共點，那麼 $ABCDEF$ 為一個完美六邊形且 $\overline{AB} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{EF} = \overline{BC} \cdot \overline{DE} \cdot \overline{FA}$ 。

Problem 6. 設三角形 ABC 的內心為 I ，內切圓分別切 BC, CA, AB 於 D, E, F ，分別在射線 $\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IE}, \overrightarrow{IF}$ 上取點 X, Y, Z 使得 $\overline{IX} = \overline{IY} = \overline{IZ}$ 。證明： AX, BY, CZ 共點。

圓的話主要就是算幂嘛，反正內幕外幕喇一喇就對了 (X

Definition 2.1. 對於任意兩圓 $\odot(O_1), \odot(O_2)$ ，我們稱 $\mathcal{R} := \{A \mid \mathcal{P}(\odot(O_1), A) = \mathcal{P}(\odot(O_2), A)\}$ 為 $\odot(O_1), \odot(O_2)$ 的根軸 (Radical Axis)。

Remark. 對於一個點 O ，實際上就是半徑為 0 的圓，我們當然也可以定義圓幂，也就是 $\mathcal{P}(O, A) := \overline{OA}^2$ ，所以當然也可以跟其他的圓有根軸。

Proposition 2.1. 設兩圓 ω_1, ω_2 交於 A, B 兩點，則 AB 為 ω_1, ω_2 的根軸。

Theorem 2.3 (根心定理). 對於任意三個圓 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ，令 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 分別為 $(\omega_2, \omega_3), (\omega_3, \omega_1), (\omega_1, \omega_2)$ 三對圓的根軸，則 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 重合或共點。

Corollary. 對於兩圓 ω_1, ω_2 ，令其根軸為 ℓ ， A 為一點，過 A 作兩線分別交 ω_1, ω_2 於 $(P_1, Q_1), (P_2, Q_2)$ 四點，則 P_1, P_2, Q_1, Q_2 共圓 $\iff A \in \ell$ 。

Definition 2.2. 對於任意三個圓 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ，令 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 分別為 $(\omega_2, \omega_3), (\omega_3, \omega_1), (\omega_1, \omega_2)$ 三對圓的根軸，則我們稱

(i) $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 共軸，若 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 重合。

(ii) $R := \ell_1 \cap \ell_2 \cap \ell_3$ 為 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 的根心 (Radical Center)，若 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 共點。

Problem 7. 設兩圓 $\odot(O_1), \odot(O_2)$ 交於 X, Y 兩點，過 O_1 作一直線 ℓ_1 交 $\odot(O_2)$ 於 P, Q 兩點，過 O_2 作一直線 ℓ_2 交 $\odot(O_1)$ 於 R, S 兩點。證明：若 P, Q, R, S 共圓，則其圓心位於 XY 上。

Proposition 2.2. 對於三個圓 $\odot(O_1), \odot(O_2), \odot(O_3)$ ，若 $\odot(O_1), \odot(O_2), \odot(O_3)$ 共軸，則 O_1, O_2, O_3 共線。

Problem 8. 令 \overline{AB} 為 $\odot(O)$ 上的一弦， M 為劣弧 AB 的弧中點。過一個 $\odot(O)$ 外的點 C 作兩條切線分別切 $\odot(O)$ 於 S, T 。設 MS, MT 分別交 AB 於 E, F 。過 E, F 分別畫條垂直

AB 的直線分別交 OS, OT 於 X, Y 。再畫一條過 C 的直線並交 $\odot(O)$ 於 P, Q ，令 R 為 MP 跟 AB 的交點。最後再令 Z 是 $\triangle PQR$ 的圓心。證明： X, Y, Z 共線。

Proposition 2.3. 對於任意四點 A, B, C, D ，若取一點 E 使 $\triangle ABD \simeq \triangle AEC$ ，則 $\triangle ABE \simeq \triangle ADC$ 。

Theorem 2.4 (托勒密定理 (不等式)/Ptolemy's). 對於四點 A, B, C, D ， A, B, C, D 共圓若且唯若 $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DB} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} \geq 2 \cdot \max\{\overline{AB} \cdot \overline{CD}, \overline{AC} \cdot \overline{DB}, \overline{AD} \cdot \overline{BC}\}$

Corollary (三弦定理). 對於凸四邊形 $ABCD$ ， A, B, C, D 共圓若且唯若 $\overline{AB} \cdot \sin \angle CAD + \overline{AD} \cdot \sin \angle BAC = \overline{AC} \cdot \sin \angle BAD$

Example 4. 令 ABC 是一個可愛的三角形， M 是 BC 中點。圓 ω 經過 A, M 且分別交 CA, AB 於 P, Q 。令 T 是那個讓 $APTQ$ 是平行四邊形的點，設 T 在 $\odot(ABC)$ 上。求 $\frac{\overline{AT}}{\overline{AM}}$ 的所有可能值。

Theorem 2.5 (斯特瓦特定理/Stewart's). 對於三點 A, B, C 滿足 $A \in \overline{BC}$ 及任一點 P ，有

$$\overline{PB}^2 \cdot \overline{CA} + \overline{PC}^2 \cdot \overline{AB} = \overline{PA}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB}$$

Theorem 2.6 (張角定理). 對於共線三點 A, B, C 及任一點 $P \notin \{A, B, C\}$ ，有

$$\frac{\sin \angle BPC}{\overline{PA}} + \frac{\sin \angle CPA}{\overline{PB}} + \frac{\sin \angle APB}{\overline{PC}} = 0$$

老實說，最後這個我沒用過。

$$\ddagger \quad \frac{1}{7} = 0.142857$$

沒按照難度，隨便排的 XD

Exercise 0. 設 $\triangle ABC$ 滿足 $\angle BAC = 60^\circ$ ，若 I, O, H 分別為 $\triangle ABC$ 的內心、外心及垂心。證明： B, H, I, O, C 共圓。

Exercise 1. 給定 $\triangle ABC$ ，令 P, Q 為兩點滿足 $PBQC$ 為平行四邊形。證明： $\angle ABP = \angle PCA$ 若且唯若 $\angle BAP = \angle QAC$ 。

Exercise 2 (2018 APMO P1). 設三角形 ABC 的垂心為 H ，點 M, N 分別為邊 AB, CA 的中點。設 H 位於四邊形 $BMNC$ 的內部，且 $\odot(BMH)$ 與 $\odot(CNH)$ 相切。過 H 並與 BC 平行的直線分別再與 $\odot(BMH), \odot(CNH)$ 交於點 K, L 。令點 F 為 MK 與 NL 的交點，而點 J 為 $\triangle MHN$ 的內心。試證： $\overline{FJ} = \overline{FA}$ 。

Exercise 3 (ISL 2015 G5). 令 $\triangle ABC$ 為一個非等腰三角形， D, F, G 分別為邊 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 的中點。圓 Γ 過 A 且和 AB 相切於 D 分別交線段 BF, CG 於 H, I 。 H', I' 分別為 H, I 關於 F, G 的對稱點， $H'I'$ 分別交 CD, FG 於 Q, M ， AM 交 Γ 於 $P \neq A$ 。證明： $AQ = QP$ 。

Exercise 4. 給定 $\triangle ABC$ ，令 P 為 $\odot(ABC)$ 上一點，過 B, P 作一圓 Γ_B 使其與 AB 相切，過 C, P 作一圓 Γ_C 使其與 CA 相切。設 $Q \neq P$ 為 Γ_B, Γ_C 的另一個交點。證明： PQ 與過 A 平行於 BC 的直線交於 $\odot(ABC)$ 上。

Exercise 5. 設 D, E, F 位於 $\triangle ABC$ 的外接圓上滿足 AD, BE, CF 共點於 P ， Q 為 $\odot(ABC)$ 上另一點，令 X, Y, Z 分別為 QD, QE, QF 與 BC, CA, AB 的交點。證明： P, X, Y, Z 共線。

Exercise 6 (Telv Cohl). 給定 $\triangle ABC$ ， D, E, F 分別位於 BC, CA, AB 上，滿足 D, E, F 共線。設 P 為 BE, CF 的交點， R, T 分別為 AD, AP 與 $\odot(ABC)$ 的另一交點， S 為 R 關於 BC 的對稱點。證明： $\odot(ABC), \odot(AEF), \odot(PST)$ 三圓共點。

Exercise 7 (2017 APMO P2). 設 ABC 為三角形，其中 $AB < AC$ 。令 D 為 $\angle BAC$ 的內角平分線與 $\odot(ABC)$ 的另一個交點，又令 Z 為 AC 的中垂線與 $\angle BAC$ 的外角平分線的交點。證明： AB 線段的中點，會落在三角形 ADZ 的外接圓上。

Exercise 8. 在等腰 $\triangle ABC$ 中， M 為底邊 BC 的中點，在形內有一點 P ，滿足 $\angle PBC = \angle PCA$ 。證明： $\angle BPM + \angle CPA = 180^\circ$ 。

什麼？你沒聽說過 3,6 題通常最難嗎？

4 是密克叻

密克優，一款降血壓的藥物，作用機制為抑制腎臟對鈉和鉀的再吸收，增加鈉離子及水分排泄，以降低血壓。常見副作用為低血鉀及電解質改變，相對來說，牛頓線的副作用少多了，解析還很方便。

Proposition 4.1. 令 $Q = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$ 為一完全四線形，其中 $A = \ell_1 \cap \ell_2, B = \ell_1 \cap \ell_3, C = \ell_1 \cap \ell_4, D = \ell_3 \cap \ell_4, E = \ell_2 \cap \ell_4, F = \ell_2 \cap \ell_3$ (之後就用這個標點，我就不改了)，那麼 $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ 的中點們共線。

對，就是牛頓線。

Proposition 4.2. 令 Q 為一完全四線形，其中的四個三角形的垂心們共線。

為了證明這件事，我們先介紹個引理：

Lemma (施坦納定理). 令 P 為 $\triangle XYZ$ 的外接圓上一點， H 為 $\triangle XYZ$ 的垂心， P 關於 BC, CA, AB 的對稱點分別為 P_a, P_b, P_c ，那麼 H, P_a, P_b, P_c 共線。

為了證明這件事，我們先介紹個引理的引理：

Lemma (西姆松定理). 令 P 為 $\triangle XYZ$ 的外接圓上一點， P 關於 BC, CA, AB 的垂足分別為 P_A, P_B, P_C ，那麼 P_A, P_B, P_C 共線。

為了證明這件事，我們先介紹個引理的引理的引理：

Lemma Example 2.

Example 5. 設 $\triangle ABC$ 的垂心為 H ， M, N, P 分別為 $\overline{BC}, \widehat{BAC}, \overline{HN}$ 的中點，證明： MP 垂直於 AN 。

Problem 9 (ISL 2009 G8). 令 $ABCD$ 為一個圓內接四邊形， g 為經過 A 的一直線並分別交 \overline{BC} 與 \overline{CD} 於 M, N 。令 I_1, I_2, I_3 分別為 $\triangle ABM, \triangle MNC, \triangle NDA$ 的內心，證明： $\triangle I_1 I_2 I_3$ 的垂心位於 g 上。

Problem 10. 設三角形 ABC 的內心為 I 、垂心為 H ，令 E, E' 分別為內切圓、 B -旁切圓與 CA 的切點， F, F' 分別為內切圓、 C -旁切圓與 AB 的切點。若 I' 為 I 關於 EF 的對稱點，證明： $HI' \perp E'F'$ 。

Theorem 4.1. 令 Q 為一完全四線形，圓們 $\odot(AD), \odot(BE), \odot(CF)$ 共軸且 Q 中的四個三角形的垂心們都在他們根軸上。

所以我們就叫這條根軸垂心線，其實國際通用的是直接叫他施坦納線。

Corollary. 令 Q 為一完全四線形，其垂心線 S 跟牛頓線 τ 垂直。

Proposition 4.3. 令 Q 為一完全四線形， M 是他的密克點，那麼 (∞_τ, M) 是 Q 的一組等角共軛點對。

好，總之就是 $\angle BAM = \angle(\tau, AE)$ ，然後其他點也有類似結論。

Example 6. 令 I_b, I_c 分別為 $\triangle ABC$ 的 B, C -旁心， I_b, I_c 關於 BC 的垂線分別交 CA, AB 於 E, F ，證明： $\triangle ABC$ 的外心位於 $\odot(ABE)$ 與 $\odot(ACF)$ 的根軸上。

Problem 11. 設 $\triangle ABC$ 的內心為 I ，外心為 O ，內切圓分別切 BC, CA, AB 於 D, E, F ，令 FD, DE 分別交 CA, AB 於 Y, Z ， K 為 $\triangle DYZ$ 的外心，證明： $\angle AIO = \angle KID$ 。

¶ 鴨鵝

放嫫，嫫嫫闖鵝諫探截打撲你，疑衍得軀哪嚟截？禰俾放攞美巧豎甞巧燄鴉。

Exercise 9. 令 Q 為一完全四線形， O 為 Q 的密克圓的圓心、 τ 為 Q 的牛頓線。若 AD 為 Q 的其中一個對角線，證明： $\angle(MA, \tau) = \angle OMD$ 。

Exercise 10. 令 $\odot(I)$ 為 $\triangle ABC$ 的內切圓並切 BC 於 D ， X 在 \widehat{BC} 上使得若 E, F 分別為 X 關於 BI, CI 的垂足，則 EF 中點 M 滿足 $\overline{MB} = \overline{MC}$ ，證明： $\angle BAD = \angle XAC$ 。

Exercise 11. 給定銳角三角形 $\triangle ABC$ ，令 O 為其外心，再令 Γ 為 $\triangle OBC$ 的外接圓， G 是 Γ 上一點，令 $\triangle ABG, \triangle ACG$ 的外接圓分別與 CA, AB 交另一點於 E, K 為 BE 與 CF 的交點，證明： AK, BC, OG 共點。