
組合

高晔竣

June 2, 2019

Problem 1. 有一個正 $2n$ 邊形的建築物，在每面塗滿 3 種顏色的其中一種，並且每個顏色至少被用到一次。另外，站在建築物外面的任一點，都只能看到兩種顏色。請問滿足以上條件的塗色方法總共有幾種？

Problem 2. 兩個袋子中分別有 2017 和 2000 個硬幣。A 和 B 兩人輪流操作，由 A 開始，輪到自己回合時從某一袋中拿走 2 到 4 個硬幣，並在另一袋中放入 1 個硬幣。最先不能進行這個操作的人輸。請問誰有必勝策略？

Problem 3. 從 1 到 50 中的正整數選若干個數，使得任兩個的和都是合數，請問最多可以選幾個？

Problem 4. 你有一個 $n \times n$ ($n \geq 3$) 的棋盤，每個方格中有一個 $[0, n]$ 中的整數，使得每一個 2×2 子方格的數字和都不同。求所有可能的 n 。

Problem 5. 平面上有 2015 個點，任選其中 5 個點都有其中兩個點的距離小於 1。證明可以在平面上畫一個單位圓，使得圓內至少有 504 個點。

Problem 6. 有一個 5×5 的棋盤，一開始所有方格都是白色的。從 A 開始，A 和 B 輪流把白色的方格塗黑，直到有 k 個黑格為止。接著，如果 A 有辦法用若干個 L 形三方塊蓋住白格 (三方塊不能重疊，而且不能蓋到黑格上)，使得沒被蓋住的白格少於 3 個，則 A 獲勝。求最大的整數 k 使得 A 有必勝策略。

Problem 7. 有 N 顆石頭，從 A 開始，A 和 B 輪流取石，每次拿的石頭數量必須是 1 或者質數或者 k 的倍數，其中 k 是某個已知的正整數。請問有幾個 N 會讓 B 有必勝策略？

Problem 8. 單位圓內有 65 個點，任三個點不共線。證明存在其中 3 個點，圍成的三角形面積不超過 $\frac{1}{18}$ 。

Problem 9. 兩個袋子中分別有 n 個硬幣。A 和 B 兩人輪流操作，從 A 開始，輪到自己時可以選擇從兩袋中各拿走恰一個硬幣，或者從某一袋中拿走至少一個硬幣。不能拿硬幣的人輸。請問誰有必勝策略？

Problem 10. 你用 x 個 L 形三方塊和 y 個 2×2 四方塊，把 7×9 的棋盤不重疊的蓋滿了。求數對 (x, y) 的所有可能值。

Problem 11. 在一個 1×1 的正方形中有若干個圓，並且這些圓的周長和為 10。證明：存在一條直線通過至少 4 個圓。

Problem 12. 有一個 n 邊形 ($n \geq 4$)，使得每個點對每條對角線的對稱點都在 n 邊形內部或邊上。求所有可能的 n 以及多邊形的長相。

Problem 13. 平面上有藍點和紅點共 2009 個，使得對每一個藍點，恰有兩個紅點和它的距離是 1。求藍點數的最大可能值。

Problem 14. 空間中有一隻蚊子，一開始在原點 $(0,0,0)$ 。它每次可以飛恰好 \sqrt{n} 的距離來到另一個空間中的格子點。求所有的正整數 n ，使得每個格子點 (a,b,c) ，蚊子都有辦法從原點飛偶數次後到達。

Problem 15. 黑板上寫著 1 到 n 的所有正整數。一開始 A 擦掉其中一個數，接著 B 擦掉兩個相鄰整數，接著 A 擦掉三個相鄰整數，接著 B 擦掉四個相鄰整數。求最小的 n ，使得無論 A 如何擦整數，B 都有辦法完成操作。

Problem 16. 有一個 30 個點的完全圖，每條邊被塗上藍色或紅色。你每次可以選一個不完全同色的三角形，把一樣顏色的那兩條邊換成另一個顏色。證明：你總是有辦法在若干次操作後，把所有邊變成同一個顏色。

Problem 17. 有一個 $m \times n$ 的棋盤，從 A 開始，A 和 B 輪流下棋子，棋子只能下在每一列中，第一個（最左）沒有棋子的方格。如果其中一條直行中的 m 個方格都是 A 的棋子，那麼 A 就獲勝；否則棋盤下滿後 B 獲勝。求所有 (m,n) 使得 A 有必勝策略。

Problem 18. 有 2016 個相異整數，每個數的所有質因數都不超過 30。證明存在其中 4 個相異整數 a,b,c,d 使得 $abcd$ 是完全平方數。

Problem 19. 有一個 $4 \times 4 \times 4$ 的立方體，每個立方格內有一個整數。你每次可以選一個立方格，把它所有相鄰立方格內的數都增加 1。請問：無論初始狀態為何，是否都能進行有限次操作，使得所有立方格內的數都是 3 的倍數？

Problem 20. 在座標平面上最多可以選幾個格子點，使得所有點對的曼哈頓距離只有兩種可能值？

Problem 21. 至少要在 $n \times n$ 的棋盤中塗黑幾個格子，才能滿足：對所有 $m > \frac{n}{2}$ ，所有 $m \times m$ 子棋盤的兩條對角線上都至少有一個黑格？

Problem 22. 有 n 個點，某些點對之間有藍線連接。對兩個點 u,v ，如果 u 連接的藍線數量 + v 連接的藍線數量至少為 n ，就在 u,v 之間連一條紅線。證明：如果紅線構成的圖存在哈密頓環，那麼藍線構成的圖也存在哈密頓環。

Problem 23. 有 k 對夫妻，其中某兩男彼此認識若且惟若他們的妻子彼此認識。他們要去泡湯，有 n 個浴池，規定男人不能和女人一起泡，並且男人只想和不認識的男人泡湯，女人只想和認識的人泡湯。給定整數 n ，求最大的 k 使得，無論 k 對夫妻認識彼此的情形為何，都有辦法安排到 n 個浴池內。

Problem 24. 有 n 個禮物要分給 n 個小孩。第 i 個小孩喜歡禮物中的其中 $x_i > 0$ 個。證明：如果 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \leq 1$ ，那麼就存在一種分禮物的方式，讓每個小孩都分到喜歡的禮物。

Problem 25. 有一個正 n 邊形，每個頂點上都有一個硬幣，一開始恰一個硬幣為反面朝上，其他的都是正面朝上。你每次可以選其中 m 個形成正 m 邊形的頂點，把這些頂點的硬幣全部翻面。證明：不可能把硬幣全部翻成正面朝上。