

圖論

鄭容濤

0 前言

圖論是組合常常會遇到的問題，只不過一般的圖論題目都不會寫成圖論的形式，雖然並不是換成圖論敘述原題就會迎刃而解，但換成圖論命題可以幫助理解題意，或是結合一些定理或經驗找到突破口。定義看似很多，但大部分都是很直覺的定義。

1 圖之定義一

Definition 1. 一張圖 (graph) 是一個序對 (V, E) ，其中 V 為一個點的集合， E 是邊的集合。一條邊連接 V 中的兩個點， $(v_1, v_2) \in E$ 代表從 v_1 連到 v_2 的邊。

類似的可以定義超圖 (hypergraph)，但是這張講義不會討論。接下來除非特別註明，都假設 V 跟 E 是有限集。

Definition 2. 一條沒有方向的邊稱為無向邊，否則稱之為有向邊。一張圖只有無向邊就叫做無向圖，如果只有有向邊就叫做有向圖。

Definition 3. 自環是一個自己連到自己的邊，兩條邊是重邊代表它們有同樣的起點和終點。

Definition 4. 一張沒有自環和重邊的圖叫做簡單圖。

接下來除非特別註明，否則一律只討論簡單圖。

Definition 5. 任意兩個點都有一條邊的無向圖叫做完全圖，任意兩個點都有兩條邊互指的有向邊的有向圖叫做有向完全圖，任意兩個點都有恰有一條有向邊的有向圖叫做競賽圖。

Definition 6. 一張圖中，一個點 v 連到的邊的數量稱為度數 $\deg(v)$ ，以該點為起點的有向邊的數量稱為出度 $\deg^+(v)$ ，以該點為終點的有向邊的數量稱為入度 $\deg^-(v)$ 。

Definition 7. 一張圖中，一個點的鄰居是所有跟他有邊的點所形成的點集。

Example 1. (握手定理) 任何圖 $G = (V, E)$ 滿足 $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$ ，任何有向圖 $G = (V, E)$ 滿足 $\sum_{v \in V} \deg^+(v) = \sum_{v \in V} \deg^-(v) = |E|$

Example 2. 一張圖中，度數是奇數的點是偶數個。

Example 3. 一個沒有三角形的圖有 n 個點，證明邊數小於等於 $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$

2 圖之定義二

Definition 8. 一張圖 $G = (V, E)$ 中， v_1, v_2, \dots, v_n 是一條路徑代表 $(v_i, v_{i+1}) \in E$ 對於所有 $i = 1, 2, \dots, n-1$ ，其中所有經過的邊互不相等

Definition 9. 一張圖 $G = (V, E)$ 中， v_1, v_2, \dots, v_n 是一個環代表 $(v_i, v_{i+1}) \in E$ 對於所有 $i = 1, 2, \dots, n$ ，其中所有經過的邊互不相等，且 $v_{n+1} = v_1$

Definition 10. 簡單環是一個沒有經過任何一個點兩次的環，簡單路徑是一個沒有經過任何一個點兩次的路徑。

Definition 11. 一張圖中，兩個點 v_1, v_2 是連通的代表存在一個從 v_1 走到 v_2 或從 v_2 走到 v_1 的路徑。一張無向圖是連通的代表任兩點之間連通，一張有向圖被稱之為弱連通代表任兩點之間連通，一張有向圖 $G = (V, E)$ 被稱之為強連通代表任兩個點 $v_1, v_2 \in V$ ，都有路徑從 v_1 走到 v_2 和路徑從 v_2 走到 v_1 。

Definition 12. 一個連通圖 $G = (V, E)$ 中，一條邊被稱作橋若把那條邊拔掉會變得不連通。一個點被稱作關節點若把那個點和連到他的邊拔掉會變不連通

Example 4. 一張連通圖 $G = (V, E)$ 滿足 $|E| + 1 \geq |V|$

Definition 13. 一張圖 $G = (V, E)$ 中，我們可以把每條邊賦一個實數值，稱之為該邊的邊權。定義一條路徑的長度就是所有經過的邊的值的和， v_1, v_2 的距離定義為所有從 v_1 走到 v_2 的路徑中長度的最小值，寫作 $d(v_1, v_2)$ ，若 v_1 走到 v_2 的路徑不存在， $d(v_1, v_2)$ 被記為 ∞ 。

從直觀來看，通常圖中有負環時會避免定義距離。

Example 5. 若存在從 v_1 走到 v_2 的路徑， $d(v_1, v_2)$ 就可以被定義。

接下來的圖若非特別註明，每條邊的邊權都是 1

Example 6. 一張圖上定義的距離滿足三角不等式 $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$

Definition 14. 一張圖 $G = (V, E)$ 中一個點 $v \in V$ 的離心率是 $\max \{d(v, u) | u \in V\}$

Definition 15. 一張圖 G 的直徑 $D(G)$ 是最遠的兩個點的距離，一張圖的中心是離心最小的點的集合，一張圖 G 的半徑 $r(G)$ 是中心的離心率。

Example 7. 一張無向圖 G 有 $2r(G) \geq D(G) \geq r(G)$

3 圖之定義三

Definition 16. 一張圖 G 若可以分成 k 個部分，使得任一個部分裡面沒有邊，則它是一個 k 部圖。若任兩個不同部分的點都相鄰，稱 G 為完全 k 部圖。定義 K_{t_1, \dots, t_k} 是一個完全 $k > 1$ 部圖使得 k 個部份的點數分別是 t_1, \dots, t_k ，值得注意的是 K_n 代表的是 n 個點的完全圖。

一個二部圖又叫做二分圖

Example 8. 一張圖 G 是二部圖若且惟若他沒有奇環。

Definition 17. 一張圖 G 被叫做 k 正則圖若每個點的度數都是 k ，如果每個點度數一樣就可以叫做正則圖

Example 9. 一張圖 G 是 k 正則圖，則 $k|G|$ 是偶數。

Definition 18. 圖 G 和圖 H 被叫做同構若它們的頂點存在一一對應使得兩個點在 G 有連邊若且惟若它們對應的點在 H 有連邊。

Definition 19. 圖 G 和圖 H 被叫做補圖若它們的頂點存在一一對應使得兩個點在 G 有連邊若且惟若它們對應的點在 H 沒有連邊。

Example 10. 一個圖和他的補圖至少有一個連通

Definition 20. 圖 H 是圖 G 的子圖 (subgraph) 若 H 可以由 G 刪掉一些邊跟點得來。假如 H 可以由 G 刪掉一些點跟那些刪掉的點相鄰的邊得來，稱 H 是 G 的 induced subgraph

4 圖之定義四

Definition 21. 一張圖 G 的子圖 H 被稱為團 (完全子圖) 當 H 是完全圖

Definition 22. 一張圖 G 的子圖 H 被稱為獨立集當 H 中一個邊都沒有是完全圖

Definition 23. 一張圖 G 的點覆蓋是一個點集，使得任何一條邊都有一段在點集裡面

Definition 24. 一張圖 G 的邊覆蓋是一個邊集，使得任何一條點都有連到一個邊集裡面的點

Definition 25. 一張圖 G 的匹配 M 是 G 的一個子圖，使得任意兩條邊都不相鄰

Definition 26. 一張圖 G 的匹配 M 是完美匹配代表 M 包含 G 裡面所有的點

Definition 27. 一張無向圖 G 中兩個點 u, v ， u, v 間的割是一個邊集，使得如果這些邊都被移除， u, v 會不連通

Definition 28. 一張無向圖 G 中兩個點 u, v ， u, v 間的流是一些兩兩沒有共同邊的從 u 到 v 的路徑

Example 11. 一張無向圖 G 中其極大匹配的邊數不小於最大匹配的邊數的一半

Example 12. 一張無向圖 G 中兩個點 u, v ， u, v 間的最大流量等於最小割數

Example 13. 一張無向圖 G 中最大獨立集的點數加上最小點覆蓋的點數等於總頂點數

Example 14. 一張無向圖 G 中最大匹配的邊數加上最小邊覆蓋的邊數等於總頂點數

Theorem 1. (König Theorem) 一張二分無向圖 G 中最小點覆蓋的點數等於最大匹配的邊數等於兩部圖中的最大流等於最小割

Theorem 2. (Hall Theorem) 一張二分無向圖 G 中兩部分頂點的集合分別為 X, Y ，假設 $|X| \leq |Y|$ ， G 的最大匹配邊數為 $|X|$ 若且惟若 X 中任意 k 個點至少和 Y 中 k 個點相鄰。

Example 15. 一張無向正則二分圖有完美匹配

Theorem 3. (Turán Theorem) 圖 G 有 n 個頂點且不含 $r+1$ 個點的完全子集，則其邊數最大值為 $(1 - \frac{1}{r})\frac{n^2}{2}$ 。等號成立在 G 是完全 r 部圖，且任兩部點數之差不超過 1

5 樹

Definition 29. 一張無向圖 G 被稱為森林若他沒有環，被稱為樹若他是連通的森林。不難發現森林就是一堆樹的聯集。

Example 16. 對於一個無向圖 T ，下面的定義是等價的

1. T 是一棵樹
2. T 為恰有 $|V| - 1$ 條邊的連通圖
3. T 有 $|V| - 1$ 條邊且沒有圈
4. T 是一個連通圖滿足每條邊都是橋
5. T 中任兩個點間都有唯一的路徑
6. T 中沒有圈，但隨便加入一條邊就會形成圈

Definition 30. T 是一棵樹，度數為 1 的點被稱作葉子。

Example 17. T 是一棵至少有兩個點的樹， T 至少有兩個葉子。

Example 18. T 是一棵樹，則 T 是二部圖。

Definition 31. T 是一棵樹，可以隨便抓一個點為根，然後每個點到根有唯一路徑，此時一個根以外的點 u 往根走一步抵達的點 v 叫做 u 的父親，而 u 就是 v 的小孩，注意到一個非根點沒有小孩若且惟若他是葉子。一個點走到根的路徑遇到的所有點被稱作他的祖先。

Example 19. T 的最多只有兩個中心，且此時這兩個中心會相鄰

Example 20. T 的直徑都會通過所有中心，且中心會在直徑的中間位置

Definition 32. 一張圖 G ， T 是 G 的生成樹若 T 是 G 的子圖且 T 是一棵樹。

Example 21. 任意連通圖都有生成樹

6 歐拉迴路和哈密頓路徑

Definition 33. 一張圖 G 若存在一個路徑可以通過所有邊，則這路徑被稱之為 G 的歐拉路徑。若存在一個環可以通過所有邊，這環被稱之為歐拉環。

Theorem 4. 一張無向連通圖存在歐拉環若且惟若沒有度數為奇數的點，一張有向連通圖存在歐拉環若且惟若每個點的出度等於入度

Theorem 5. 一張無向連通圖存在歐拉路徑若且惟若度數為奇數的點小於等於兩個，一張有向連通圖存在歐拉路徑出度不等於入度的點最多兩個，且出度不等於入度的點滿足出度跟入度相差為 1

Definition 34. 一張圖 G 若存在一個路徑可以通過所有點，則這路徑被稱之為 G 的哈密頓路徑。若存在一個環可以通過所有點，這環被稱之為哈密頓環。

有些神奇的定理可以告訴你一些特定的圖有哈密頓環或哈密頓路徑，這邊列出最有名的那個

Theorem 6. (Ore Theorem) 在一張具有 $n \geq 3$ 個點的圖 G 中，若對於任意兩不相連的點的度數和都大於等於 n ，則 G 中存在哈密頓迴路。

7 有向圖和競賽圖

Definition 35. 一個有向無環圖 (DAG) 是一個沒有環的有向圖。

Definition 36. 一個強連通分量是一個強連通的 induced subgraph

因為在強連通分量裡面，任意兩個點都能到達彼此，所以不會對連通性造成影響，於是我們可以想像把每個強連通分量看成一個點，那麼剩下的圖就會變成 DAG。

Definition 37. 一張有向圖的拓撲排序是把頂點排序，使得排在後面的點不會有邊連到排在前面的點

Example 22. 一張有向圖存在拓撲排序若且惟若他是 DAG

前面定義過競賽圖，競賽圖其實有一些很好的性質

Example 23. 一張競賽圖中出度的平方和等於入度的平方和

Example 24. 一張競賽圖的半徑小於等於 2

Example 25. 一張三個點以上的競賽圖的中心至少有三個點

Example 26. 一張競賽圖存在哈密頓路徑

這也代表競賽圖經過強連通分量縮點之後會變成一條鍊

Theorem 7. 一張 n 個點的強連通競賽圖存在長度為 k 的環對於 $k = 3, 4, \dots, n$ ，特別地，一個競賽圖有哈密頓環若且惟若他是強連通的

Theorem 8. 一張 n 個點的強連通競賽圖，對於任意點 v 存在長度為 k 的環過 v 對於 $k = 3, 4, \dots, n$

Example 27. 一張競賽圖若有長度為 m 的環，則有所有長度小於 m 的環

8 著色與平面圖

Definition 38. 一個圖上的一個點著色是把所有頂點分成 k 個集合，使得每個集合都是獨立集。最小的 k 稱為最小點著色數

Example 28. k 部圖可以點 k 著色

Definition 39. 一個圖上的一個邊著色是把所有邊分成 k 個集合，使得沒有兩個同集合的邊相鄰。最小的 k 稱為最小邊著色數

Definition 40. 一個圖上的一個全著色是把所有點和邊分成 k 個集合，使得沒有兩個同集合的邊或點相鄰。最小的 k 稱為最小全著色數

Definition 41. 一個平面圖是一個可以放在平面上使得邊不相交的圖

Definition 42. 一個平面圖 G ，定義面是 G 將平面分成的若干個互不相通的封閉區域

Theorem 9. (Euler's formula) 一個平面圖 G ， v, e, f, c 分別是頂點數，邊數，面數，和連通塊數，則 $v - e + f = c + 1$

Example 29. 一個連通平面圖 G ， v, e 分別是頂點數和邊數，則 $e \leq 3v - 6$

Theorem 10. (Kuratowski's Theorem) 一個圖不是平面圖若且惟若他有一個子圖是 K_5 或 $K_{3,3}$ 的衍生物

Example 30. 證明 Petersen Graph 不是平面圖

Theorem 11. (四色定理) 平面圖可以把點四著色

一些小退化可以用暴力方法

Example 31. 平面圖可以把點五著色

Example 32. 地圖上有很多國家，地圖中間有一個大湖，每個國家都跟湖相鄰，證明可以用三種顏色將國家塗色使得相鄰國家不同色

Theorem 12. (Vizing Theorem) 簡單圖 G 的最小邊著色數等於所有頂點的最大度數或最大度數加一

Definition 43. 定義圖 G 為 class 1，若 G 的最小邊著色數等於所有頂點的最大度數，否則 G 為 class 2

下面給出一些例子

Theorem 13. (Sanders, Zhao) 滿足最大度數 > 6 的平面圖是 class 1

當簡單平面圖 G 的最大度數小於 6 的時候上述定理都已經找到反例，而最大度數為 6 的情況還是猜想。

Theorem 14. (König's line coloring theorem) 二分圖是 class 1

Theorem 15. 有哈密頓圈的三正則圖是 class 1

Example 33. 證明 Petersen Graph 是 class 2

其實這樣就偷偷證明 Petersen Graph 沒有哈密頓圈了

Theorem 16. 奇數點的正則圖是 class 2

Theorem 17. (Brooks' Theorem) 連通圖 G 的最小點著色數小於等於所有頂點的最大度數加一，等號只成立在奇環和完全圖。

Theorem 18. (Molloy, Reed) 圖 G 的最小全著色數小於等於所有頂點的最大度數加 10^{26}

Theorem 19. 二分圖的最小全著色數小於等於所有頂點的最大度數加 2

猜想是：任意圖 G 的最小全著色數小於等於所有頂點的最大度數加 2

9 Ramsey 定理

Example 34. 有六個人，認識的關係是互相的，證明存在三個人互相認識或互相不認識

Definition 44. (Ramsey number) 有 $k > 1$ 個圖 H_1, H_2, \dots, H_k ，定義 r_{H_1, \dots, H_k} 為最小的 n 使得將 K_n 邊 k 塗色後一定存在一個 i 使得 H_i 是第 i 色的邊和相鄰點所形成的子圖中的子圖。如果 H_1, H_2, \dots, H_k 分別是大小為 n_1, \dots, n_k 的完全圖，就寫作 r_{n_1, \dots, n_k}

Example 35. 定義 $I = (n_1, \dots, n_k)$, $I^{(i)} = (n_1, \dots, n_{i-1}, n_i - 1, n_{i+1}, \dots, n_k)$ 證明

$$r_{n_1, n_2, \dots, n_k} \leq \sum_{i=1}^k r_{I^{(i)}} - k + 2$$

Theorem 20. (Schur's Theorem) 給定正整數 k ，證明存在 N 使得將不超過 N 的正整數的分成 k 類時，必存在正整數 $x, y, x + y$ 是同一類

10 題目

粗略地幫題目難度排序，不過蠻主觀的。有些題目很難，做不出來也不要傷心

Problem 1. (Easy) 找到最小的正整數 n 使得在任意給定的 n 個無理數中，存在三個無理數，其中兩兩的和也是無理數

Problem 2. (Easy) 平面上有 25 個點不共線，任意三點組成的三角形中最小邊長 < 1 ，證明可以用一個單位圓盤蓋住其中至少 13 個點

Problem 3. (Easy) 任意 18 人，一定有四人是兩兩認識或兩兩不認識

Problem 4. (Easy) 有 n 個人，若任選四個人都有一個人認識其他三個人，問至少有幾個人認識除了自己外的所有人

Problem 5. (Easy) 任意 n 人，可以把人分成兩堆使得一個人在另一堆的朋友比在自己這堆的朋友多

Problem 6. (Easy) 點數大於 2 的連通正則二部圖沒有橋

Problem 7. (Easy) 有 n 個人，任意兩人至多通電話一次，他們中的任意 $n - 2$ 人之間通電話的總次數相等，都是 3^m 次，其中 m 是正整數，求 n 的所有可能值。

Problem 8. (Easy) 一個社團有 n 個人，來自 k 個國家，將他們從 1 到 n 任意編號，證明當 $n \geq k!(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \dots + \frac{1}{k!}) + 1$ 時，存在一個人的編號是某個同國家的人的兩倍或是某兩個同國家的人的號碼的和。

Problem 9. (Easy) 竹塹國有 n 個城市，且每 $n-3$ 個城市都可以找到另一個城市跟這 $n-3$ 個城市都有直達雙向道，請問竹塹國至少有幾條直達雙向道？

Problem 10. (Easy)(2001 C3) 一張無向圖，任意兩個三角形有共同交點，且沒有 K_5 在裡面，證明可以拔掉兩個點使得三角形被拔光

Problem 11. (Easy)(2018 Canada MO) 我們說正整數 a, b 是「相關的」若且唯若 $a = pb$ 或 $b = pa$ ，其中 p 為質數。試求所有有至少三個因數的正整數 n ，使得存在一種 n 的因數的環狀排列滿足環上任意一組相鄰的兩個數都是相關的。

Problem 12. (Easy) 若 n 個點的競賽圖中任兩個點所連出的點集之交集的大小皆為 t ，證明 $n = 4t + 3$ 。

Problem 13. (Easy) 有 $3n + 1$ 人，每兩個人可一起玩象棋、圍棋或跳棋。已知每個人都跟 n 個人下象棋，跟 n 個人下圍棋，跟 n 個人下跳棋。證明存在三個人他們之間下了一盤圍棋、一盤象棋、一盤跳棋。

Problem 14. (Easy) 證明不是所有平面圖都可以把點三塗色。

Problem 15. (Easy) 一個圖 G ，所有點塗白色，一個操作是選擇一個點，並把該點與跟該點相鄰的點改變顏色(黑變白或白變黑)，證明可以經過有限次操作把 G 的所有點變黑色

Problem 16. (Easy)(2004 C3) 一個圖，每次可以找一個長度是 4 的圈，砍掉它任意一個邊。現在從一個有 n 點完全圖開始不斷做這個操作，問最少剩幾條邊？

Problem 17. (Easy)(2018 2J P2) 有 n 隻羊和一隻披著羊皮的狼。有些對羊是好朋友。狼的目標是要吃掉所有的羊。首先他從 n 隻羊中挑一些建立好友關係，接下來的每一天，他從他的好友羊中挑一隻吃掉。每當他吃掉一隻羊 A 時：

- (i) 一隻 A 的好友羊，如果本來跟狼是好友，就會跟狼斷絕好友關係
 - (ii) 一隻 A 的好友羊，如果本來不是狼的好友，就會跟狼建立好友關係
- 重複以上動作，直到狼再也沒有好友為止。

試求最大的正整數 m (用 n 表示)，滿足下列條件：

存在一種 n 頭羊之間的好友關係，使得狼總共有 m 種選擇起始好友羊的方式，讓狼有方法可以吃完所有的羊。

Problem 18. (Easy)(Erdős-Gallai theorem) 一個正整數數列 $d_1 \geq \dots \geq d_n$ 是一個 n 個點的無向圖的度數若且惟若 $d_1 + \dots + d_n$ 是偶數且

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min(d_i, k)$$

對於所有 $1 \leq k \leq n$

Problem 19. (Medium Easy)(2014 Russia) 有 n 張卡，其中任兩張都有一張贏過另一張。將這 n 張卡分給兩位玩家，各自疊成一疊。在每回合：

- (i) 他們先比較牌庫最上方的牌
 (ii) 哪個玩家的牌比較大，他就把雙方牌庫最上方的牌都拿走，並依照他們都同意的順序，將這兩張牌塞在他的牌庫最下方
 試證：不論起始 n 張牌如何分配，這兩位玩家總有辦法透過合作，在有限回合內將所有牌集中在某一位玩家的牌庫中。

Problem 20. (Medium Easy) 一張 $n > 2$ 個點以上的競賽圖滿足沒有一個點出度是 $n - 1$ ，證明中心至少有三個點。

Problem 21. (Medium Easy)(1995 ISL NT, Combs 5) $12k$ 人參加會議，每個人恰與 $3k + 6$ 人握過手，並且對任意的兩人，與這兩人握過手的人數皆相同，請問有多少人參加會議？

Problem 22. (Medium Easy) $A(0, 0), B(1, 0)$ 在 y 軸恆大於 0 的折線段的兩端，他們可以在雙方高度一樣的前提下一起移動，證明他們可以移動到同一個位置。

Problem 23. (Medium Easy) n 個點 m 條邊的無向圖，每條邊上有兩兩不同的編號。證明存在長度為 $\lceil \frac{2m}{n} \rceil$ 的路徑使得經過的編號遞增。

Problem 24. (Medium Easy)(2003 APMO P5) 給定正整數 m, n ，求最小的 k 滿足 K_k 用紅藍塗色，必有 m 條 $2m$ 個端點互異的紅邊，或是 n 條 $2n$ 個端點互異的藍邊

Problem 25. (Medium Easy)(2013 C3) 給定一張有圖，你可以對他做兩件事

- (i) 選擇一個度數是奇數的頂點，把它與連它的邊消滅掉
 (ii) 畫一張一模一樣的圖，並和原圖對應點連線

試證：可以在有限步內讓此圖沒有邊

Problem 26. (Medium Easy)(1992 IMO P3) 給定空間中九個點，任意四個點不共面，在每一對點之間都連一條線段，試求出最小的 n ，使得將其中任意 n 條線段中的每一條任意地紅藍塗色後，存在一個同色三角形。

Problem 27. (Medium Easy)(1989 APMO P4) 一張無向圖有 n 個點 m 個邊，證明至少

$$4m \cdot \frac{(m - \frac{n^2}{4})}{3n}$$

個三角形。

Problem 28. (Medium Easy) A 和 B 在一張點數為奇數的無向圖上玩遊戲，一開始 B 先決定棋子的開始頂點，然後 A, B 輪流把棋子移到當下棋子所在頂點相鄰的頂點上，不能移動到曾經移動過的頂點，誰先不能動誰就輸了，證明 B 有必勝策略

Problem 29. (Medium Easy) A 和 B 在一棵樹上玩遊戲， A, B 輪流把樹上的一個點標成 $1, 2, 3, 4$ 的其中一個數字，並滿足在任何時刻都不會有兩個相鄰點有一

樣的標號，A 希望所有點都被標號，B 希望存在點沒有被標號遊戲就結束了。試證明 A 有必勝策略

Problem 30. (Medium Easy)(Sperner) 有一個三角形三個頂點分別是紅色藍色黃色，在三角形邊上和內部有有限個點，滿足

1. 藍色黃色的邊上沒有紅色
2. 紅色黃色的邊上沒有藍色
3. 藍色紅色的邊上沒有黃色

內部的點則是隨意塗成紅藍黃色之一，接著把三角形用那些點三角剖分。證明存在一個小三角形的三個頂點異色。

Problem 31. (Medium) (2016 C6) 有 $n \geq 3$ 座島，一間渡輪公司在其中若干對島嶼間架設航線，使得當我們將這些島分成非空的兩群時，總是可以從兩組中各挑出一座島，使得這兩座島之間有航線。每年年底，公司會挑選有航線相連的島 X 和 Y ，並關閉期間的航線。同時，對於所有其他島嶼 A ，若 A 和 X 有航線，但和 Y 沒有航線，則公司將會增設 A 和 Y 之間的航線，反之，若 A 和 Y 有航線，但和 X 沒有航線，則公司將會增設 A 和 X 之間的航線。假設我們知道在任意的時間點，若我們將這些島分成非空的兩群，則公司必然會在若干年內關閉一條連接此兩群島的航線。試證，若干年後會有一座島，他和所有島之間都有航線。

Problem 32. (Medium)(Iran TST 2006) 對一個競賽圖的邊紅藍染色。證明總存在一個點 u ，使得對於任意點 v ， u 只需要經過一種顏色的邊即可到達 v 。

Problem 33. (Medium)(Smith) 一張無向圖每個點的度數都是奇數，證明哈密頓圈的個數是奇數。

Problem 34. (Medium)(Cayley's formula) n 個點的有標號的有 k 棵樹的森林有 kn^{n-k-1} 種

Problem 35. (Medium)(2007 IMO P3) 一張無向圖的最大團的大小是偶數，證明可以把頂點分成兩個圖，使得這兩個圖有一樣的最大團大小。

Problem 36. (Medium Hard)(Friendship Theorem) 一張無向圖滿足任意兩個點都恰有一個點同時跟它們有連邊，證明有一個點連到所有邊。

Problem 37. (Medium Hard)(Caro-Wei Theorem) 一個圖各點的度數為 d_1, \dots, d_n ，則該圖的最大獨立集至少有

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+d_i}$$

個頂點

Problem 38. (Medium Hard) 一張無向圖 G ，一個點集 D 叫做支配點集若任意一個不在 D 的點都有鄰居在 D 裡面，證明支配點集的個數是偶數。

Problem 39. (Hard)(Empire problem) 一個地圖，每個國家有 m 個相斥的國土，證明可以用 $6m$ 種顏色把所有國家塗色，使得相鄰的不同國家不同色。

Problem 40. (Ulam's Conjecture) 兩張圖 G, H 各有 p 個點 g_i 和 h_i ，若對於所有 i ， G 拔掉 g_i 跟 H 拔掉 h_i 同構，那麼 G 跟 H 同構