

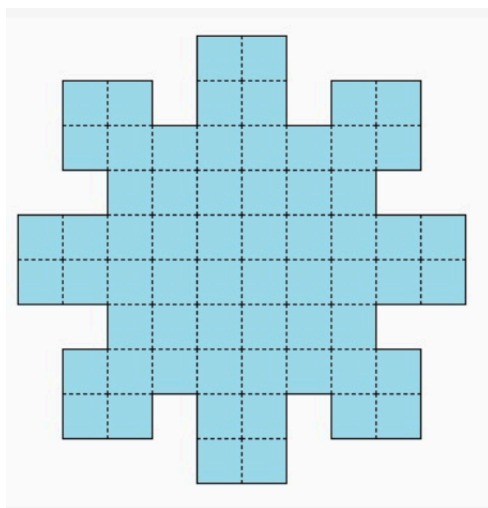
Schurhead, SOS, UVW 合體，天空出現『鳳凰展翅』雲朵

蛋捲鯛魚燒

April 25, 2019

0 暖身

試著把下面的圖沿著隔線切成 5 塊然後拼成 8×8 的方格



1 正能量

- 如果夢想有捷徑的話，那條路的名字叫暴力。
- 暴力不會否定任何人，就怕自己否定暴力。
- 真正的強者，那也都不是沒有眼淚的人，而是含著眼淚依然暴力的人。
- 逆風的方向，更適合暴力。
- 世界上沒有什麼不等式是用暴力不能解決的。如果有，那就是你不夠暴力。
- 有些事情，不是看到希望才堅持；而是，暴力下去才看得到希望。

2 Schurhead

相信算幾跟柯西已經是大家熟知的結果:

Theorem. (*AM-GM*) 給定任意 $n \in \mathbb{N}$ 個非負實數 a_1, a_2, \dots, a_n ,

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

恆成立且等號成立若且唯若 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

Theorem. (*Cauchy*) 對於任意實數 a_1, a_2, \dots, a_n 以及 b_1, b_2, \dots, b_n , 下述的不等式成立:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2$$

不過要巧妙地使用卻不是那麼容易, 因此我們該來看一些炸不等式的方法。首先, 最簡單的方式, 當然就是通分齊次啦! 而有兩個定理常用來處理通分完的結果

Theorem. (*Schur*) 給定非負實數 a, b, c , 則

$$a^t(a-b)(a-c) + b^t(b-a)(b-c) + c^t(c-a)(c-b) \geq 0$$

對任意 $t > 0$ 都成立。等號成立當且僅當 $a = b = c$ 或 $a = b, c = 0$ 與其排列。

通常只會用到 $t = 1, 2$ 的情況, 也就是

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$$

還有

$$a^4 + b^4 + c^4 + a^2bc + b^2ca + c^2ab \geq a^3b + a^3c + b^3a + b^3c + c^3a + c^3b$$

Theorem. (*Muirhead*) 如果 $\{a_i\}_{i=1}^n$ 蓋住 $\{b_i\}_{i=1}^n$, 而 x_1, x_2, \dots, x_n 是正實數, 那麼

$$\sum_{\sigma} x_{\sigma(1)}^{a_1} x_{\sigma(2)}^{a_2} \dots x_{\sigma(n)}^{a_n} \geq \sum_{\sigma} x_{\sigma(1)}^{b_1} x_{\sigma(2)}^{b_2} \dots x_{\sigma(n)}^{b_n}$$

畢竟全部展開之後, 會有很多項, 所以用簡單的記號來簡化式子, 會比較好算。

Notation. 任意三未知數 a, b, c 以及函數 f , 我們令

$$\sum_{cyc} f(a, b, c) = f(a, b, c) + f(b, c, a) + f(c, a, b)$$

$$\sum_{sym} f(a, b, c) = f(a, b, c) + f(a, c, b) + f(b, a, c) + f(b, c, a) + f(c, a, b) + f(c, b, a)$$

Example. (*Vasc*) 證明對於所有正數 a, b, c , 都有

$$\frac{1}{4a^2 - ab + 4b^2} + \frac{1}{4b^2 - bc + 4c^2} + \frac{1}{4c^2 - ca + 4a^2} \geq \frac{9}{7(a^2 + b^2 + c^2)}$$

當展開完的項數很多的時候，其實並不容易看出怎配。幸好聰明的地理老師有講過

Notation. (*Chinese Dumbass Notation*) 直接舉例好了

$$\begin{bmatrix} & & & 1 & & \\ & & 0 & & 0 & \\ & 0 & & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & & 3 & \\ 0 & -5 & & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

代表的就是 $a^4 + 3abc^2 - 5b^3c$

Example. 證明對於所有正數 a, b, c ，都有

$$\frac{bc}{2a+b+c} + \frac{ca}{2b+c+a} + \frac{ab}{2c+a+b} \leq \frac{a+b+c}{4}$$

事實上，這樣能處理的題目很有限，譬如說，當變數被塞在根號裡面，或是不等式並不是對稱的。但在炸不等式的時候，並非只是無腦亂炸，往往能夠透過加強題目，讓它變成比較好炸的形式。像是遇到以上情況時，都可以用柯西處理。

Example. (*Mathboy45*) 如果 $x, y, z \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 滿足 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ，證明：

$$\frac{x}{\sqrt{1+yz}} + \frac{y}{\sqrt{1+zx}} + \frac{z}{\sqrt{1+xy}} \leq \frac{3}{2}$$

面對高次根號的方式當然就用 Hölder

Theorem. (*Hölder*) 給定 $p, q > 1$ 滿足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ，則

$$(a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} (b_1^q + b_2^q + \cdots + b_n^q)^{\frac{1}{q}} \geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

對所有正數 a_1, a_2, \dots, a_n 以及 b_1, b_2, \dots, b_n 都成立。

Example. (*Turkey*) 如果正數 a, b, c 滿足 $a^2 + b^2 + c^2 \leq 3$ ，則

$$(a+b+c)(a+b+c-abc) \geq 2(a^2b + b^2c + c^2a)$$

雖說柯西好用，但很容易把題目變過難甚至是反號，就稍微記一下 Vasc

Theorem. (*Vasc*) 只要 $a, b, c \geq 0$ ，就有

1. $4(a+b+c)^3 \geq 27(a^2b + b^2c + c^2a + abc)$
2. $(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^3b + b^3c + c^3a)$

3 Sum of Squares

Theorem. 假設 $S = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2$ ，則當以下的情況

- $S_a, S_b, S_c \geq 0$
- $S_a, S_c, S_a + 2S_b, S_c + 2S_c \geq 0$
- $S_b, S_b + S_a, S_b + S_c \geq 0$ 且 b 落在 a, c 之間
- $S_b, S_c, b^2S_a + a^2S_b \geq 0$ 且 $a \geq b \geq c$

發生時，我們可以說 $S \geq 0$

有兩種可能會讓人想用 SOS

1. 不想展開
2. $LHS - RHS$ 容易分解

Example. 對於任意 $a, b, c \geq 0$ ，證明

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$$

Example. 假設 $a, b, c > 0$ ，證明

$$\frac{2a^2 - bc}{b^2 - bc + c^2} + \frac{2b^2 - ca}{c^2 - ca + a^2} + \frac{2c^2 - ab}{a^2 - ab + b^2} \geq 3$$

使用 SOS 最關鍵的就是對因式分解的感覺，像是幾個常見的等式都該記熟

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= \frac{1}{2}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) \\ (a-b)(a-c) &= \frac{1}{2}((a-b)^2 + (a-c)^2 - (b-c)^2) \end{aligned}$$

注意到，其實我們也可以拆成 $T_a(a-b)(a-c) + T_b(b-a)(b-c) + T_c(c-a)(c-b)$

Example. (ELMO) 如果 $a, b, c > 0$ ，證明

$$\sqrt{\frac{a^4 + 2b^2c^2}{a^2 + 2bc}} + \sqrt{\frac{b^4 + 2c^2a^2}{b^2 + 2ca}} + \sqrt{\frac{c^4 + 2a^2b^2}{c^2 + 2ab}} \geq a + b + c$$

Remark. 雖然對於這題，直接用 Hölder 就好。但會不能解決比較難的推廣問題

$$\sqrt{\frac{a^4 + 9b^2c^2}{a^2 + 9bc}} + \sqrt{\frac{b^4 + 9c^2a^2}{b^2 + 9ca}} + \sqrt{\frac{c^4 + 9a^2b^2}{c^2 + 9ab}} \geq a + b + c$$

4 UVW Method

Theorem. (*UVW*) 給定 $u, v, w \in \mathbb{R}$ ，則以下兩條敘述等價

- 存在 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 使得

$$3u = a + b + c, \quad 3v^2 = ab + bc + ca, \quad w^3 = abc$$

- $u^2 \geq v^2$ 且

$$w^3 \in \left[3uv^2 - 2u^3 - 2\sqrt{(u^2 - v^2)^3}, \quad 3uv^2 - 2u^3 + 2\sqrt{(u^2 - v^2)^3} \right]$$

其實上面的結論不太重要，只是利用 UVW 可以推出以下不錯用的結果

Theorem. (*Tejs*)

1. 當我們固定 u, v 時，若存在 w 使得存在那樣的 $a, b, c \geq 0$ ，則 w^3 的最大值發生在 a, b, c 中有兩者相等；最小值發生在兩者相等或是其中一個變數為 0。
2. 當我們固定 u, w 時，若存在 v 使得存在那樣的 $a, b, c \geq 0$ ，則 v^2 的極值發生在 a, b, c 中有兩者相等。
3. 當我們固定 v, w 時，若存在 u 使得存在那樣的 $a, b, c \geq 0$ ，則 u 的極值發生在 a, b, c 中有兩者相等。

跟之前講得不同，用 UVW 沒有甚麼好想的，真的就只是無腦開定理，無腦亂算。

Example. (*Sqing*) 給定正數 a, b, c 使得 $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ ，證明

$$\frac{ab+3}{a+b} + \frac{bc+3}{b+c} + \frac{ca+3}{c+a} \geq 6$$

Example. (*Jack Garfunkel*) 如果 $a, b, c > 0$ 滿足 $a^2 + b^2 + c^2 \leq a + b + c$ ，證明

$$a^4 + b^4 + c^4 + a^2b^2c^2 \leq 4$$

當然，在比較麻煩的不等式中，不好直接說明是 u, v, w 其中一個的遞增函數，於是有些等式就變得頗重要，反正多算題目就會記起來了。

Example. (*leonardg*) 假設非負實數 a, b, c 滿足 $a + b + c = ab + bc + ca > 0$ ，證明

$$bc\sqrt{46a+9b+9c} + ca\sqrt{46b+9c+9a} + ab\sqrt{46c+9a+9b} \geq 24$$