

重心坐標

鄭容濤

Feb 14, 2018

0 前言

重心坐標又稱面積坐標，並不是指重心的座標，而是一種建構在三角形上的齊次坐標體系，特別適合解決三角形的問題，而三角形裡的問題是競賽最常出現的。重心坐標可以說是做幾何最有效的工具之一，因為它比純幾可靠，而且常比直角或複數解析來得美麗。甚至偶而會比綜合幾何更為簡潔，將其精熟可以說是大有裨益。如果你是喜愛鍛鍊肌耐力的同胞，請千萬不要錯過機會；又或者你不願暴力，也給這方法一個機會，或許它將會成為幾何黯淡中的一盞明燈，指引你一條腳踏實地但也確切通往著成功之徑。沒有人後悔學過重心坐標，只有人懊悔沒有解析。不要害怕展開而故步自封，畏懼暴力而作繭自縛；乘開一項海闊天空，化簡一式豁然開朗；生於憂患，死於安樂。

1 定義

Definition 1. $\triangle ABC$ 平面上一點 P ，將三角形有向面積比 $(\triangle PBC : \triangle PCA : \triangle PAB) = (x : y : z)$ 定義為 P 點的重心坐標。當 $x + y + z = 1$ 時稱 P 的坐標正規化。

由此可得到以下兩點。

Corollary 1. 無窮遠點 P 的重心坐標 $(x : y : z)$ ，將滿足 $x + y + z = 0$ 。

Corollary 2. P 的重心坐標 $(x : y : z)$ ，當 $x + y + z = 1$ 時，
 $x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C} = \vec{P}$ 。

由其向量表示中不難發現，三點共線、分點公式等直角座標上的公式在正規化後的重心坐標上也可以使用。

Example 1. (USA TST 2003/2) Let ABC be a triangle and let P be a point in its interior. Lines PA , PB , PC intersect sides BC , CA , AB at D , E , F , respectively. Prove that

$$[PAF] + [PBD] + [PCE] = \frac{1}{2}[ABC]$$

if and only if P lies on at least one of the medians of triangle ABC . (Here $[XYZ]$ denotes the area of triangle XYZ .)

Definition 2. P, Q 的重心坐標 $(x_1 : y_1 : z_1), (x_2 : y_2 : z_2)$ 皆正規化後，定義 $\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1 : y_2 - y_1 : z_2 - z_1)$

來複習一下定義

Example 2. 求下列各點的重心坐標，用三邊長表示且不用正規化。
頂點、 BC 中點、重心、內心、旁心、外心、垂心、奈格爾點、內切圓三切點。

2 公式 site

分點公式在正規化後才會變成正確的比例。

Theorem 1. 直線的方程式 $ux + vy + wz = 0$ ，其中 u, v, w 是係數， $(x : y : z)$ 是坐標。

Example 3. 三角形 ABC 平面上有直線 L 坐標 $ux + vy + wz = 0$ ，則 A, B, C 到 L 的有向距離是 $u : v : w$ 。

Example 4. 奈格爾點 Na ，內心 I ，重心 G 共線，且 $2\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{GNa}$

利用長度性質求點坐標。

Example 5. $\triangle ABC$ 內心 I ，內切圓分別切 BC, AC, AB 於 D, E, F ， ID 交 EF 於 T ， C 對 BI 作垂直線交 BI 於 J ， B 對 CI 作垂直線交 CI 於 K ，證明 J, K 在 EF 上，且 $KT : TJ = c : b$ 。

Example 6. $\triangle ABC$ 內心 I ，內切圓分別切 BC, AC, AB 於 D, E, F ， ID 交 EF 於 T ，證明 AT 平分 BC 。

Example 7. (Kariya) $\triangle ABC$ 內心 I ，內切圓分別切 BC, AC, AB 於 D, E, F ，以 I 為中心將 DEF 縮放至 XYZ ，證明 AX, BY, CZ 共線。

Example 8. (2016 APMO P3) Let AB and AC be two distinct rays not lying on the same line, and let ω be a circle with center O that is tangent to ray AC at E and ray AB at F . Let R be a point on segment EF . The line through O parallel to EF intersects line AB at P . Let N be the intersection of lines PR and AC , and let M be the intersection of line AB and the line through R parallel to AC . Prove that line MN is tangent to ω .

Example 9. $\triangle ABC$ 內心 I ，奈格爾點 Na ，內切圓切 BC 於 D ， ID 交內切圓於 S ， AS 交 BC 於 F ，證明 A, Na, F 共線且 $AS = NaF$ 。

要導下列公式時，為了方便而令外接圓是直角坐標的圓心，這是因為 $\vec{A} \cdot \vec{A} = R^2$ 與 $\vec{A} \cdot \vec{B} = R^2 - \frac{c^2}{2}$ ，而且這讓 Strong EFFT 的結論好用。

Theorem 2. 垂直公式 (EFFT)， $\overrightarrow{MN} = (x_1 : y_1 : z_1), \overrightarrow{PQ} = (x_2 : y_2 : z_2) \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \sum_{cyc} a^2(y_1 z_2 + y_2 z_1) = 0$

再推導的過程中可以參透 Strong EFFT

Theorem 3. (Strong EFFT)

$\overrightarrow{MN} = x_1 \overrightarrow{A} + y_1 \overrightarrow{B} + z_1 \overrightarrow{C}, \overrightarrow{PQ} = x_2 \overrightarrow{A} + y_2 \overrightarrow{B} + z_2 \overrightarrow{C}$ ，且
 $(x_1 + y_1 + z_1)(x_2 + y_2 + z_2) = 0$ ，則 $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \sum_{cyc} a^2(y_1 z_2 + y_2 z_1) = 0$

Theorem 4. $P(x:y:z)$ 的等角共軛點 $Q(\frac{a^2}{x} : \frac{b^2}{y} : \frac{c^2}{z})$

Example 10. $\triangle ABC$ 內心 I 外心 O ，過 I 平行 BC 的線跟 A 對 (BAC) 的切線交於 X ，類似定義 Y, Z ，證明 XYZ 共線且垂直 OI 。

Example 11. $\triangle ABC$ 上， BC, CA, AB 上各取一點 D, E, F 使得 AD, BE, CF 共點， EF 交 BC 於 P_A ， AP_A 中點 M_A ，類似定義 M_B, M_C 。

(1) 證明 M_A, M_B, M_C 共線 L 。

(2) 若 D, E, F 為內切圓切點，證明 L 垂直內心與垂心連線。

Example 12. $\triangle ABC$ 對外接圓做三切線，兩兩交於 D, E, F 與 A, B, C 順序一致且相對， AD, BE, CF 交於 K ， A 對 BC 高的中點 P ， BC 中點 M ，證明 M, P, K 共線。

Theorem 5. $\overrightarrow{PQ} = (x:y:z)$ ，則 $PQ^2 = -a^2yz - b^2xz - c^2xy$

Theorem 6. 共圓的方程 $-a^2yz - b^2xz - c^2xy + (ux + vy + wz)(x + y + z) = 0$ ，其中 u, v, w 是實數的係數。

Corollary 3. 外接圓的重心坐標 $-a^2yz - b^2xz - c^2xy = 0$ 。

Corollary 4. $-a^2yz - b^2xz - c^2xy + (ux + vy + wz)(x + y + z)$ 將正規化後的點的座標代入，即可得該點對此圓的幂。

Corollary 5. 兩圓相減的直線就是他們的根軸。

Example 13. (2011 ISL G2) Let $A_1A_2A_3A_4$ be a non-cyclic quadrilateral. Let O_1 and r_1 be the circumcentre and the circumradius of the triangle $A_2A_3A_4$. Define O_2, O_3, O_4 and r_2, r_3, r_4 in a similar way. Prove that

$$\frac{1}{O_1A_1^2 - r_1^2} + \frac{1}{O_2A_2^2 - r_2^2} + \frac{1}{O_3A_3^2 - r_3^2} + \frac{1}{O_4A_4^2 - r_4^2} = 0.$$

下面這題換成外接錐線也會對，換成 n 邊形也會對 (平行軸定理結合圓幂)。

Example 14. $\triangle ABC$ 重心 G ， AG, BG, CG 交外接圓於 D, E, F ，證明 $\frac{AG}{GD} + \frac{BG}{GE} + \frac{CG}{GF} = 3$ 。

Theorem 7. 標準化後的 $P(x_1:y_1:z_1), Q(x_2:y_2:z_2), R(x_3:y_3:z_3)$ ，則

$$\triangle PQR \text{ 的面積為 } \triangle ABC \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

如果沒有標準化就要乘上去。

起初這些公式不會很熟，沒有關係回來看就好，基本上會用到的不會超過這些。其實有個東西叫做 Conway，但那個其實就是正弦，每次遇到再自己導就好。

3 解題策略

重心坐標可以說是一種需要技巧的解析，有很多方法可以化簡式子的繁複程度。重要的技巧有如”同一法”、”選定比較好的三角形”、”巧妙避開繁複的計算”、”偷偷用一點純幾”、”先反演後解析”、”算冪”、”大保交比”

Example 15. 完全四邊形存在牛頓線。

Example 16. 完全四邊形的牛頓線上的無窮遠點的等角共軛點是密克點。

Example 17. $\triangle ABC$ 內心 I ，內切圓 Ω 分別切 BC, AC, AB 於 D, E, F ， AD 交 Ω 於 V ， VDC 外接圓交 DF 於 X ， CX 交 AB 於 Y ，證明 $3YF = CD$ 。

Example 18. 三角形 ABC 九點圓圓心 N 外心 O ， N 對 ABC 的垂足三角形 XYZ ，證明 AYZ, BXZ, CXY 的歐拉線交於 ON 中點。(可以換成三角形 ABC ， $B'C'$ 在 BC 上使得 AB' 垂直 AB ， AC' 垂直 AC ，則 A 連 ABC 的 De Longchamps 點會過 $B'C'$ 中點)

Example 19. (2015 ISL G4) Let ABC be an acute triangle and let M be the midpoint of AC . A circle ω passing through B and M meets the sides AB and BC at points P and Q respectively. Let T be the point such that $BPTQ$ is a parallelogram. Suppose that T lies on the circumcircle of ABC . Determine all possible values of $\frac{BT}{BM}$.

Example 20. (2017 IMO P4) Let R and S be different points on a circle Ω such that RS is not a diameter. Let ℓ be the tangent line to Ω at R . Point T is such that S is the midpoint of the line segment RT . Point J is chosen on the shorter arc RS of Ω so that the circumcircle Γ of triangle JST intersects ℓ at two distinct points. Let A be the common point of Γ and ℓ that is closer to R . Line AJ meets Ω again at K . Prove that the line KT is tangent to Γ .

Example 21. 未退化三角形 ABC 外心 O 內心 I ， BI, CI 分別交 AC, AB 於 E, F ，交 (O) 於 M, N 。 P, Q 在 BC 上照著 $PBCQ$ 的順序，且滿足 $BP = BA$ 和 $CQ = CA$ ，令 BPN 外心為 K ， CQM 外心為 L 。證明 $KL \parallel EF$ 等價 $AB = AC$ 或 $\angle A = 60$ 度。

Example 22. 三角形 ABC 外心 O ，外切三角形 XYZ ， XYZ 的中點三角形 DEF ， DEF 中 D 對到的旁心是 S ，則 AS, OX, EF 共點。

Example 23. (2017 APMO P2) Let ABC be a triangle with $AB < AC$. Let D be the intersection point of the internal bisector of angle BAC and the circumcircle of ABC . Let Z be the intersection point of the perpendicular bisector of AC with the external bisector of angle $\angle BAC$. Prove that the midpoint of the segment AB lies on the circumcircle of triangle ADZ .

Example 24. ABC ，在 AB, AC 上取 P, Q 使得 $BP = CQ$ ， $(ABQ) \cap (ACP) = X$ ，證明 AX 是 $\angle BAC$ 角平分線。

Example 25. ABC 外心 O ， B, C 對到旁心 Y, Z ， Y, Z 對 BC 做垂直線交 AC, AB 於 T, S ， $(ABT) \cap (ACS) = X$ ，證明 AOX 共線。

Example 26. (Fontene 1st) 三角形 ABC 中一點 P ， P 的等角共軛點 Q ， P 的垂足三角形 DEF ， ABC 中點三角形 XYZ ， YZ 交 EF 於 U ，類似定義 V, W ，證明 DU, EV, FW 交於 $ABQC$ 的龐色列點。請證明 P 為內心的 case。

Example 27. M 是三角形 ABC 的角平分線 AD 的中點。圓 k_1 以 AC 為直徑交 BM 於 E ，圓 k_2 以 AB 為直徑交 CM 於 F 。證明 B, E, F, C 共圓。

如果要處理”如果甚麼會成立的前提下，證明另一式成立時”，會變得比較麻煩，因為將會是已知多項式求證另一個多項式是 0，而這通常需要找公因式。

Example 28. $\triangle ABC$ 內心 I ，垂心 H ，重心 G ，奈格爾點 Na 。已知 $IH \perp ANa$ 證明 $BC \parallel GI$ 。

Example 29. $\triangle ABC$ 內心 I ，垂心 H ，重心 G ，奈格爾點 Na ， BNa 交 AC 於 Z ， CNa 交 AB 於 Y ， AH 交 BC 於 D ， AD 中點 T ，已知 $IH \parallel BC$ 證明 Y, T, Z 共線。

4 有趣

Example 30. $\triangle ABC$ 中一點 $P(n_1 : n_2 : n_3)$ 則 P 對 ABC 的反西瓦三角形有坐標

$$(-x : y : z), (x : -y : z), (x : y : -z)$$

Example 31. $\triangle ABC$ 中一點 $P(n_1 : n_2 : n_3)$ 有三線性極線

$$n_2 n_3 y z + n_3 n_1 z x + n_1 n_2 x y = 0$$

給定 $P(x_1 : y_1 : z_1), Q(x_2 : y_2 : z_2)$ ，可不可以做出 $(x_1 x_2 : y_1 y_2 : z_1 z_2)$ 的點呢？ $P = Q$ 時呢？

其實是都可以的，可以參考 Special Isocubics in the Triangle Plane 的 1.2.2

Example 32. If triangles ABC and $A'B'C'$ are orthologic with centers P, P' then the barycentric coordinates of P with respect to ABC are equal to the barycentric coordinates of P' with respect to $A'B'C'$.

Example 33. Let \mathcal{C} be the inconic of $\triangle ABC$ with perspector P .
Let Q be the antigonal conjugate of P WRT $\triangle ABC$.
Prove that the center of \mathcal{C} lie on the trilinear polar of Q WRT $\triangle ABC$

Example 34. P/Q 表示 P 的希瓦三角形跟 Q 的反希瓦三角形的透視中心，則 $P/(P/Q) = Q$

Example 35. P 的 anticomplement 的 isotomic conjugate 的 cyclocevian conjugate 的 isotomic conjugate 的 complement 是 P 的 isogonal conjugate

Example 36. 重心對外接錐線的極線平行錐線的等截共軛軌跡。

Example 37. kiepert 雙曲線跟外接圓的交點 Tarry point 的對徑點在史坦那橢圓上 (Steiner point)。

5 題目們

這裡的題目全部可以用重心坐標作，當然也可以純幾。(我只放了我自己有解析出來的題目)

Problem 1. 三角形 ABC 平面上一點 P ， P 的等角共軛點 Q ， P 的反西瓦三角形 DEF ，證明 $PQ \parallel BC$ 等價 $PBCD$ 共圓。

Problem 2. 三角形 ABC 內心 I ， BC 上中點 M ，內切圓切 BC, AB 於 D, F ， AM 中點 N ， BN 交 AD 於 J ，過 J 做平行 BC 的直線交過 A 做垂直 CI 的直線於 X ， FX 交 BC 於 P ，證明 D 對 IP 的對稱點在九點圓上

Problem 3. (2005 ISL G1) Given a triangle ABC satisfying $AC + BC = 3 \cdot AB$. The incircle of triangle ABC has center I and touches the sides BC and CA at the points D and E , respectively. Let K and L be the reflections of the points D and E with respect to I . Prove that the points A, B, K, L lie on one circle.

Problem 4. (2012 USA TST P1) In acute triangle ABC , $\angle A < \angle B$ and $\angle A < \angle C$. Let P be a variable point on side BC . Points D and E lie on sides AB and AC , respectively, such that $BP = PD$ and $CP = PE$. Prove that as P moves along side BC , the circumcircle of triangle ADE passes through a fixed point other than A .

Problem 5. (2015 ISL G5) Let ABC be a triangle with $CA \neq CB$. Let D, F , and G be the midpoints of the sides AB, AC , and BC respectively. A circle Γ passing through C and tangent to AB at D meets the segments AF and BG at H and I , respectively. The points H' and I' are symmetric to H and I about F and G , respectively. The line $H'I'$ meets CD and FG at Q and M , respectively. The line CM meets Γ again at P . Prove that $CQ = QP$.

Problem 6. (2017 Taiwan TST Round 2, Quiz 2, Problem 2) Given a $\triangle ABC$

and three points D, E, F such that $DB = DC$, $EC = EA$, $FA = FB$, $\angle BDC = \angle CEA = \angle AFB$. Let Ω_D be the circle with center D passing through B, C and similarly for Ω_E, Ω_F . Prove that the radical center of $\Omega_D, \Omega_E, \Omega_F$ lies on the Euler line of $\triangle DEF$.

Problem 7. (2016 ISL G2) Let ABC be a triangle with circumcircle Γ and incenter I and let M be the midpoint of \overline{BC} . The points D, E, F are selected on sides $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ such that $\overline{ID} \perp \overline{BC}$, $\overline{IE} \perp \overline{AI}$, and $\overline{IF} \perp \overline{AI}$. Suppose that the circumcircle of $\triangle AEF$ intersects Γ at a point X other than A . Prove that lines XD and AM meet on Γ .

Problem 8. (2016 ISL G4) Let ABC be a triangle with $AB = AC \neq BC$ and let I be its incentre. The line BI meets AC at D , and the line through D perpendicular to AC meets AI at E . Prove that the reflection of I in AC lies on the circumcircle of triangle BDE .

Problem 9. (2016 ISL G7) Let I be the incentre of a non-equilateral triangle ABC , I_A be the A -excentre, I'_A be the reflection of I_A in BC , and l_A be the reflection of line AI'_A in AI . Define points I_B, I'_B and line l_B analogously. Let P be the intersection point of l_A and l_B .

- Prove that P lies on line OI where O is the circumcentre of triangle ABC .
- Let one of the tangents from P to the incircle of triangle ABC meet the circumcircle at points X and Y . Show that $\angle XIY = 120^\circ$.

Problem 10. (2016 ISL G7) Let I be the incentre of a non-equilateral triangle ABC , I_A be the A -excentre, I'_A be the reflection of I_A in BC , and l_A be the reflection of line AI'_A in AI . Define points I_B, I'_B and line l_B analogously. Let P be the intersection point of l_A and l_B .

- Prove that P lies on line OI where O is the circumcentre of triangle ABC .
- Let one of the tangents from P to the incircle of triangle ABC meet the circumcircle at points X and Y . Show that $\angle XIY = 120^\circ$.

Problem 11. Let ABC be a triangle and DEF be its orthic triangle with D on BC and so on. Let H be the orthocenter of ABC . M is the midpoint of BC . The tangents to the circumcircle of ABC at B, C along with EF determine a triangle XYZ with X opposite to A . Prove that ray HM bisects the arc YXZ of the circumcircle of XYZ .

Problem 12. given a triangle ABC , 3 altitude AA_0, BB_0, CC_0 , orthocenter H an a point P in the triangle.

A_1 is the symmetry of P through BC

B_1 is the symmetry of P through AC

C_1 is the symmetry of P through AB

Prove that A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 are concurrent.

Problem 13. P is a point in the plane of $\triangle ABC$. ℓ_a is the radical axis of

$\odot(PBC)$ and the A-excircle of $\triangle ABC$. ℓ_b, ℓ_c are defined similarly. Then ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c bound a triangle perspective with $\triangle ABC$. If P lies on the circumcircle of $\triangle ABC$, the perspector is the Clawson point of $\triangle ABC$, i.e. homothetic center of the orthic triangle and extangents triangle.

Problem 14. Let ABC be a triangle inscribed in circle (O) and incenter I . Circle (ω_a) touches (O) at A and touches BC at D . Similarly, we have circles $(\omega_b), (\omega_c)$ and E, F . Let K be radical center of $(\omega_a), (\omega_b), (\omega_c)$. Prove that line IK passes through centroid of triangle DEF . (這條線還通過 Schiffler point)

Problem 15. Let ABC be a triangle inscribed in the circle Ω . Let (A) be the circle centered A and touches the line BC , and let ω_a be the circle reflection of (A) in the line BC . The circles ω_b, ω_c are determined similarly to the way we construct the circle ω_a . Let A_r, B_r and C_r respectively be the radical centers of $\{\Omega, \omega_b, \omega_c\}$, $\{\Omega, \omega_c, \omega_a\}$ and $\{\Omega, \omega_a, \omega_b\}$. Prove that the lines AA_r, BB_r and CC_r are concurrent. (這個點是兩個拿破崙點的積喔)

Problem 16. P is an arbitrary point on the plane of $\triangle ABC$ and let $\triangle A'B'C'$ be the cevian triangle of P WRT $\triangle ABC$. The circles $\odot(ABB')$ and $\odot(ACC')$ meet at A, X . Similarly, define the points Y and Z WRT B and C . Prove that the lines AX, BY, CZ concur at the isogonal conjugate of the complement of P WRT $\triangle ABC$.

Problem 17. let ABC be a triangle, I the incenter, D, E, F the feet of the A, B, C -bisectors, M_a the perpendicular bisector of AD , Q, R the points of intersection of BI, CI with M_a , and A^* the point of intersection of EF and QR . Cyclically, B^*, C^* .
Prove : ABC and $A^* B^* C^*$ are perspective

Problem 18. 三角形 ABC 外心 O ，垂足三角形 DEF ， B, C 關於 (O) 的切線交於 T ， O 關於 AC, AB 的對稱點 P, Q ，證明 $(DEP), (DFQ)$ 的根軸過 T

Problem 19. 三角形 ABC 九點圓圓心 N ，則 N 跟 N 的等角共軛點連線過垂直歐拉線方向的無窮遠點的等角共軛點。